# BEZIEHUNGEN

DES

# DU BOIS-REYMONDSCHEN MITTELWERTSATZES

ZUR

# OVALTHEORIE

EINE MATHEMATISCHE STUDIE

VON

HERMANN BRUNN

BERLIN
DRUCK UND VERLAG VON GEORG REIMER
1905.

HERRN PROFESSOR GUSTAV BAUER

IN MÜNCHEN

AN SEINEM 84. GEBURTSTAGE

ZUGEEIGNET

## Inhalt.

# Vorrede.

Es handelt sich im Folgenden, wenn man so will, um die verschiedenen Erscheinungsformen eines einzigen Satzes. Von diesen Erscheinungsformen ist das sogenannte *Abel*sche Lemma, das sich auf endliche Summen und reelle Größen bezieht, die fundamentalste. Mit Rücksicht hierauf würde der Inhalt der Arbeit vielleicht besser durch den Titel: „Verallgemeinerungen des *Abel*schen Lemmas auf komplexem Gebiete“ gekennzeichnet worden sein. Die *bekannteste* Erscheinungsform des bewußten Satzes ist aber der *Du Bois-Reymond*sche Mittelwertsatz*) für bestimmte Integrale. Ich habe deshalb lieber diesen in den Titel aufgenommen und glaube dadurch rascher, sicherer und allgemeiner als bei anderer Wahl eine ungefähr richtige Vorstellung von dem Inhalte des Buches zu erwecken. Weiter aber wollte ich auch, daß gleich im Titel deutlich sich ausspreche, was *methodisch* am bemerkenswertesten an der Arbeit ist: das Auftreten der Ovale und die Verwertung ihrer Theorie. Die Literatur über diese und ähnliche analytisch-geometrische *Gebilde von geringer Gesetzmäßigkeit* ist noch immer nicht erheblich, die Ausdehnung der Forschung auf sehr allgemein definierte, in ihren Formen unbestimmt gehaltene Objekte aber nach meiner Meinung eine Hauptfortschrittsrichtung für die moderne Mathematik.

Daß Ovale als Rivalen der Kreise in die Elemente der Mathematik eindringen, daß die an solche scheinbar vage Formen geknüpften Fragen sich mit der nämlichen Vollständigkeit und Strenge erledigen lassen, wie man das bei Gebilden starker Gesetzmäßigkeit seit langem gewohnt ist — das sind Tatsachen, die, ob sie schon nicht mehr ganz neu sind, doch für manchen noch überraschend sein werden. Und so denke ich, daß das Prinzipielle an der Sache als Entschuldigung dafür dienen kann, wenn hier ein verhältnis-

*) Von *Weierstraß* zuerst gefunden, von *Du Bois-Reymond* zuerst veröffentlicht, wird er mit dem Namen des letzteren am häufigsten und unzweideutigsten bezeichnet.

mäßig eng umschriebenes, allerdings im guten Sinne elementares Thema etwas anspruchsvoll in die Form eines Buches ausgesponnen ist.

Eine Hauptursache für die größere Ausdehnung der Arbeit liegt in der Länge einzelner Beweise, besonders des letzten Kapitels; durch dieses ganz sich hindurchzuwinden, wird mancher Leser keine Lust haben, und ich verüble es ihm nicht. Der Geduldige aber wird vielleicht schließlich zur Erkenntnis einer gewissen Notwendigkeit in dem inneren Aufbau der Beweise vordringen. Es läßt sich freilich nie mit Sicherheit behaupten, daß nicht kürzere Beweise möglich sind; ein großer Teil der Langwierigkeit ist aber sicher der unerläßliche Kaufpreis für die erstrebte Allgemeinheit und Präzision der Resultate.

Die in dem Streben nach Präzision sich ausdrückende Vorsicht schien unbedingt ratsam. Denn die Theorie der Ovale ist ein noch selten verwendetes Hilfsmittel und die von der Gebundenheit konkreter Einzelfiguren recht weit abstehende Freiheit einer solchen Figurengattung ebenso wie die umfassende Allgemeinheit der als Ziel ins Auge gefaßten Sätze bedingen eine trügerische, den Händen leicht entschlüpfende Natur der Probleme. Man darf daher auch bei Entwicklungen, deren Ergebnis man schon deutlich vor Augen zu haben glaubt, die Bedachtsamkeit nicht verlieren; die zunächst als lästige Verzögerung empfundene Umständlichkeit wird nicht selten durch Entdeckung einer Kleinigkeit belohnt, die, weil sie den gehegten Erwartungen widerspricht, übersehen worden sein würde, und doch den Keim neuer Entwicklungen in sich birgt — somit schließlich keine Kleinigkeit, sondern vielleicht das beachtenswerteste Ergebnis der ganzen Untersuchung ist.

Ob freilich in meiner Arbeit volle Präzision überall erreicht ist — fühlt man sich doch selbst vor gröberen Versehen nie ganz sicher —, kann bei solch verwickelten Gespinsten einsamen Nachdenkens erst durch die genaue Nachprüfung anderer sichergestellt werden.

Die Arbeit *rein* analytisch zu gestalten, lag mir ferne; sie würde dadurch wahrscheinlich nur länger und schwerer verständlich geworden sein; ich glaube indes überall die Analyse so weit geführt zu haben, daß sich klar durchschauen läßt, wie die geometrischen Fassungen und Beihilfen nur zu erwünschter Vereinfachung der Darstellung, nicht aber zu täuschender Verschleierung unbewältigter Schwierigkeiten dienen. Nur einige allereinfachste Eigenschaften der Eigebilde habe ich als genugsam feststehend mit zum Fundament der Arbeit verwendet, *trotzdem* ihr allgemeiner und strenger

Beweis vielleicht noch nirgends vorliegt. Möchten die Bemerkungen auf Seite 5 einen jungen Forscher zur Beseitigung dieses Mangels ermuntern! Ein bequemes Fortrechnen ist an den wenigsten Stellen möglich; doch habe ich, wo es nur ging, die Gedankengänge, besonders die Ungleichungen, in übersichtliche, wenn auch manchmal etwas neuartige Formeln gefaßt und diese aus dem Texte heraustreten lassen.

In bezug auf die untersten Fundamente der Ovaltheorie bietet die Arbeit nichts eigentlich Neues; nur wer mit der Sache vertrauter ist, wird da und dort kleine Neuerungen in Definition und Terminologie bemerken, der Absicht entsprungen, immer bequemere und allgemeinere Satzfassungen zu ermöglichen. Die vorgeführten Verallgemeinerungen des *Abel*schen Lemmas und *Du Bois-Reymond*schen Mittelwertsatzes, welche den eigentlichen Inhalt der Arbeit ausmachen, sind mir aus der Literatur nicht bekannt; ebensowenig, wo ich nicht ausdrücklich anderes bemerke, die zu ihrer Ableitung nötigen Hilfsbetrachtungen und Hilfssätze, von denen verschiedene vielleicht auch selbständigen Wert haben.*) Bei meiner geringen Literaturkenntnis ist damit für die Neuheit der einzelnen Darbietung freilich keine Sicherheit gegeben; daß indessen irgendwo der ganze Satzkomplex schon in gleich vollständiger Verzweigung und mit ebenso eingehender Beweisführung dargestellt wäre, scheint ausgeschlossen.

Die Krönung des Ganzen bildet Satz 317. Ob derselbe — trotzdem er durch genügend einfache Silhouette Anwendungen zu versprechen scheint — jemals praktisch so wichtig werden wird, wie der reelle *Du Bois-Reymond*sche Satz, ist ungewiß, ja nicht einmal wahrscheinlich. Rein theoretisch aber liegt die Sache anders: Der einfachere Satz scheint mir durch den allgemeineren erst volles Licht zu gewinnen, etwa so, wie ein unentwickelter oder verkümmerter Organismus erst ganz verständlich wird durch Vergleich mit einem in allen Gliedmaßen wohlausgebildeten Exemplar der nämlichen Gattung.

Unsere Sätze sind ein Beispiel dafür, wie die zum Teil aus reellen, zum Teil aus komplexen Größen gebildeten Funktionen bisweilen eine eigentümlich selbständige Mittelstellung zwischen den bloß aus reellen und den bloß aus komplexen Elementen zusammengesetzten Funktionen einnehmen,

---

*) Vgl. etwa Hilfssatz 32 über die Entfernung ähnlicher, ähnlich gelegener Eigebilde, das ganze Kapitel über Punktsummen- und Punktdifferenzgebiete S. 28—44, die Hilfssätze 223, 227, 230, 231 und 279.

und wie diese mittlere Funktionsart zu Sätzen Veranlassung geben kann, die sich nicht durch Spezialisierung aus den für rein komplexe Funktionen geltenden Sätzen ableiten lassen.

Schließlich möchte ich darauf hinweisen, daß nun drei der bedeutendsten Mittelwertsätze: Der erste*) und zweite Mittelwertsatz für bestimmte Integrale und der *Hölder*sche Mittelwertsatz**) bei ihrer Verallgemeinerung auf Eigebilde geführt haben. Der gemeinsame Grund ist leicht erkennbar; man wird überhaupt überall da, wo das arithmetische Mittel

$$\frac{a_1 x_1 + a_2 x_2 + \cdots + a_n x_n}{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}$$

aus $n$ Größen $x_i$ eine offene oder versteckte Rolle spielt, auf das Hervortreten von Eigebilden gefaßt sein müssen. —

Während ich meine Schrift abschließe, sendet mir Herr *A. Schönflies* seinen Aufsatz: „Beiträge zur Theorie der Punktmengen. II." Aus der überraschenden Verwandtschaft nicht der einzelnen Sätze, aber der ganzen Gedankenunterlage beider Arbeiten gewinne ich den erfreulichen Eindruck, als ob meine Untersuchungen besser, als ich erwartet hätte, gerade den neuesten mathematischen Bestrebungen sich anfügten.

---

Um das Studium der Arbeit zu erleichtern, habe ich, abgesehen von zahlreichen Verweisungen im Text, am Schluß ein Register der Definitionen und eines der häufiger verwendeten Symbole angebracht.

Der Verlagsbuchhandlung schulde ich Dank für das freundliche Entgegenkommen, das sie meinen Wünschen gegenüber bewiesen hat, der Druckerei Anerkennung für die typographische Leistung.

München, um Weihnachten 1904.

Dr. HERMANN BRUNN,
**Privatdozent der Mathematik an der Universität München.**

---

*) Verallgemeinert durch *Weierstraß* und veröffentlicht in *Hermites* Cours lithographié, 3. Ed. p. 58, wie mir Herr *Mittag-Leffler* mitzuteilen die Güte hatte. Auf Seite 5 habe ich die 4. Ausgabe zitiert, weil mir die dritte nicht zugänglich ist.

**) Verallgemeinert in meiner Habilitations-Schrift: „Kurven ohne Wendepunkte" Seite 65 u. f.

# I.

## VON DER SUMME $\varepsilon_0 a_0 + \varepsilon_1 a_1 + \varepsilon_2 a_2 + \cdots + \varepsilon_n a_n$.

**Reelle $a$, reelle positive nie steigende $\varepsilon$: *Abel*sches Lemma. Über Verallgemeinerung desselben.**

1. In der Arbeit über die Binomialreihe bekundet sich *Abels* genialer Blick auch in der Wahl eines elementaren Hilfssatzes,*) den wir kurz als *Abel*sches Lemma bezeichnen, und der für Fragen der gleichmäßigen Konvergenz und den Beweis des zweiten Mittelwertsatzes der bestimmten Integrale sich als wichtig erwiesen hat. An diesen Satz als Thema — um mich eines musikalischen Vergleichs zu bedienen — möchte ich eine Reihe von Variationen anknüpfen.

2. Man kann dem Lemma folgende gegenüber der *Abel*schen Fassung etwas vervollständigte Form geben:

*Wenn*

$$\varepsilon_0, \varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \dots \varepsilon_n$$

*eine Reihe nicht zunehmender, positiver oder auch nullwerdender Zahlen und*

$$A_0 \equiv a_0,\ A_1 \equiv a_0 + a_1, \dots A_n \equiv a_0 + a_1 + a_2 + \cdots + a_n$$

*eine Reihe über $H$ und unter $K$ fallender reeller Zahlen ist, so fällt*

$$\varepsilon_0 a_0 + \varepsilon_1 a_1 + \varepsilon_2 a_2 + \cdots + \varepsilon_n a_n$$

*über $\varepsilon_0 H$ und unter $\varepsilon_0 K$.*

Das Lemma gilt, ob nun die $A$ sämtlich ungleich, teilweise gleich oder sämtlich gleich sind. Nur sagt es, so oft $A_{\nu+1} = A_\nu$ ist, etwas weniger aus, als es aussagen könnte, insofern dann $\varepsilon_{\nu+1}$ beliebigen endlichen Wert haben darf, ohne daß der Satz hinfällig wird.

---

*) Vergl. *Crelles* Journal, Bd. I, S. 314, Lehrsatz III.

3. Im folgenden wird ohne Schaden der Allgemeinheit, zu der man von der speziellen Annahme in jedem Augenblicke wieder zurückkehren kann, $\varepsilon_0$ gleich der Einheit angenommen.

4. Der Versuch der Verallgemeinerung des Lemmas auf lauter komplexe Größen scheint zu keinem Satze von Belang zu führen.*) Schränken wir daher unsere Ansprüche insoferne ein, als wir komplexe Natur nur von den $a$ verlangen, den $\varepsilon$ dagegen ihre Realität belassen. Geht man dann, wie *Abel* im rein reellen Fall tut, mit der Transformation der $a$ auf die $A$ vor, so ergibt sich wohl:

$$
(1.) \quad \begin{aligned} |a_0+\varepsilon_1 a_1+\cdots+\varepsilon_n a_n| &= |\sum_0^n{}_i\, \varepsilon_i (A_i-A_{i-1})| = |\sum_1^n{}_i (\varepsilon_{i-1}-\varepsilon_i) A_{i-1}+\varepsilon_n A_n| \\ &< \sum_1^n{}_i [(\varepsilon_{i-1}-\varepsilon_i)\cdot|A_{i-1}|]+\varepsilon_n |A_n| < K, \end{aligned}
$$

wo $K$ jetzt eine obere Schranke der absoluten Beträge $|A|$ bezeichnet und $A_{-1}=0$ zu setzen ist. Nicht aber gelingt es, für eine untere Schranke $H$ dieser Beträge eine entsprechende Ungleichung abzuleiten, da der absolute Betrag der Summe bei dem notwendigen Übergang zu den absoluten Beträgen der Summanden zunächst vergrößert, dann aber beim Ersatz der $|A|$ durch $H$ wieder verkleinert, das Größenverhältnis des Anfangs- zum Schlußwert also ins Unbestimmte geschoben wird.

5. Der erhaltene Satz sagt daher, geometrisch in bekannter Weise interpretiert, nur folgendes:

*Liegen die Punkte $A$ innerhalb eines Kreises, dessen Zentrum der Nullpunkt, so liegt der Punkt $\Sigma \varepsilon a$ innerhalb des nämlichen Kreises.*

6. Man kann das Resultat dadurch etwas verallgemeinern, daß man $a_0=a_0+m-m$ und für $a_0+m$ dann wieder das Zeichen $a_0$ setzt, geometrisch gesprochen eine Transformation des Nullpunkts der Koordinaten vornimmt. Man erhält:

*In Satz* 5 *darf statt des Kreises um den Nullpunkt jeder beliebige Kreis der Zahlenebene gesetzt werden.*

7. Bei genauerer Überlegung erkennt man, daß hierdurch der im Versagen der einen Grenze bestehende Mangel unseres verallgemeinerten Satzes gegenüber dem für reelle Größen geltenden so weit ausgeglichen ist,

---

*) Vergl. 139.

als man dies für Größen eines zweidimensionalen Gebietes erwarten kann. Indessen, die eben gegebene, auch wohl bereits von andern aufgestellte Verallgemeinerung leidet an einem versteckteren und wesentlicheren Mangel. Der Transformationsbeweis des *Abel*schen Lemmas erreicht zwar sein Ziel auf dem kürzesten Wege, schließt sich aber der eigentümlichen Verkettung der auftretenden Größen nicht eng genug an, um auf die richtige Verallgemeinerung zu führen. Wir ersetzen ihn durch einen anderen.

8. *Hilfssatz. Wenn $a$ und $a'$ reell sind, so liegt $a+\varepsilon a'$ für*

$$0<\varepsilon<1$$

*zwischen $a$ und $a+a'$, fällt für*

$$\varepsilon=0 \qquad \text{resp.} \qquad \varepsilon=1$$

*mit $a$, resp. $a'$ zusammen, liegt also für*

$$0\leqq\varepsilon\leqq 1$$

*sicher zwischen einer unteren Schranke $H$ und einer oberen $K$, wenn $a$ und $a+a'$ zwischen diesen Schranken liegen.*

9. Man betrachte nun das folgende dreieckig angeordnete Schema von Werten. Um die einzelnen Werte kurz bezeichnen zu können, ist jedem der Index seiner Zeile und seiner Kolonne, zu einer Doppelnummer vereinigt, vorangestellt.

$$(2.)\quad \begin{array}{lllll}
(00)\; a_0 \;\; (01)\; a_0+a_1 & (02)\; a_0+a_1+a_2 & (03)\; a_0+a_1+a_2+a_3 \ldots\ldots & (0n)\; a_0+a_1+a_2+\cdots+a_n \\
\qquad\quad (11)\; a_0+\varepsilon_1 a_1 & (12)\; a_0+\varepsilon_1(a_1+a_2) & (13)\; a_0+\varepsilon_1(a_1+a_2+a_3)\ldots\ldots & (1n)\; a_0+\varepsilon_1(a_1+a_2+\cdots+a_n) \\
 & (22)\; a_0+\varepsilon_1 a_1+\varepsilon_2 a_2 & (23)\; a_0+\varepsilon_1 a_1+\varepsilon_2(a_2+a_3)\ldots & (2n)\; a_0+\varepsilon_1 a_1+\varepsilon_2(a_2+\cdots+a_n) \\
 & & (33)\; a_0+\varepsilon_1 a_1+\varepsilon_2 a_2+\varepsilon_3 a_3\ldots & (3n)\; a_0+\varepsilon_1 a_1+\varepsilon_2 a_2+\varepsilon_3(a_3+\cdots+a_n) \\
 & & \cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot & \cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot \\
 & & & \cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot \\
 & & & \quad\vdots \\
 & & & (nn)\; a_0+\varepsilon_1 a_1+\varepsilon_2 a_2+\cdots+\varepsilon_n a_n.
\end{array}$$

Sämtliche Werte sind zwischen $H$ und $K$ eingeschlossen; für die erste Zeile folgt dies aus der Vorannahme des Lemmas, für die folgenden aus dem Hilfssatz 8 durch Schluß von den Werten $(k-1,\, k-1)$ und $(k-1,\, i)$ auf den Wert $(k,\, i)$. Es läßt sich nämlich $\varepsilon_k$ stets in die Form $\varepsilon^{(k)}\cdot\varepsilon_{k-1}$ setzen, wo $0<\varepsilon^{(k)}\leqq 1$ ist.

Man schließt also von den Werten der ersten auf die der zweiten Zeile usf. bis zur letzten Zeile, deren einziger Wert

$$a_0+\varepsilon_1 a_1+\varepsilon_2 a_2+\cdots+\varepsilon_n a_n,$$

somit auch zwischen $H$ und $K$ liegt. q. e. d.

**Komplexe $a$, reelle positive nie steigende $\varepsilon$. Eigebilde.**

10. Für komplexe Elemente besteht unser Hilfssatz in leicht veränderter Form weiter:

*Sind a und a' komplexe Zahlen, die wir in gewohnter Weise durch Punkte repräsentieren, so liegt der den Wert $a+\varepsilon a'$ repräsentierende Punkt für*

$$0<\varepsilon<1$$

*in der geraden Verbindungsstrecke der Punkte a und $a+a'$, für*

$$\varepsilon=0 \quad \textit{oder} \quad \varepsilon=1$$

*in einem Endpunkt dieser Strecke, für*

$$0\leqq\varepsilon\leqq 1$$

*also sicher innerhalb eines gewissen Gebietes, wenn die Strecke es tut.*

11. Es fragt sich nun, wie ein Gebiet $G$ beschaffen sein müßte, damit die Werte unseres Schemas (2.) bei Annahme komplexer $a$ durch eine dem Absatz 9 völlig analoge Schlußkette sämtlich als innerhalb $G$ liegend nachgewiesen werden könnten. Die Antwort lautet:

Das Gebiet $G$ muß jede gerade Verbindungsstrecke zweier ihm zugehörigen Punkte völlig in sich enthalten, darf also mit jeder Geraden seiner Ebene höchstens *ein* Stück gemein haben, nach außen nirgends konkav begrenzt sein.

Für die Begrenzungslinie solcher Gebiete habe ich in der Arbeit, mit der ich Ende 1886 promovierte,*) die Bezeichnung „Oval" eingeführt. Die Gebiete selbst, welche ich damals „volle Ovale" nannte, seien jetzt als „Ovalgebiete" bezeichnet.

---

*) Über Ovale und Eiflächen (München, bei Theod. Ackermann, 1887); Über Kurven ohne Wendepunkte (ebenda 1889); Referat über eine Arbeit: Exakte Grundlagen für eine Theorie der Ovale (Sitz.-Ber. d. math.-phys. Kl. d. k. bayer. Akad. d. Wiss., 1894, Bd. XXIV, S. 93; die Arbeit selbst ist bisher nicht erschienen); Über das durch eine beliebige endliche Figur bestimmte Eigebilde (Boltzmannfestschrift 1904, S. 94).

12. Leicht erkennt man, daß die angestellten Betrachtungen auch für komplexe Zahlen $a$ von der Form $\Sigma \alpha_i e_i$ mit mehr als zwei unabhängigen Einheiten $e_i$ giltig bleiben, geometrisch gesprochen für „Eigebiete“ in Räumen von drei, vier und mehr Dimensionen, deren Begrenzungen ich durchweg als „Eigebilde“ bezeichne. Die Untersuchung soll allgemein gehalten werden, bis sich Gründe dafür ergeben, auf komplexe Zahlen $a+bi$ im engern Sinne uns zu beschränken.

13. Über die Eigenschaften der Eigebiete und Eigebilde vergleiche man außer meinen eigenen Arbeiten die des Herrn *H. Minkowski*,*) welche sich vor meinen Erstlingserzeugnissen durch Präzision, Systematik und reiche Anwendungen auszeichnen. Die beiderseitigen Arbeiten entstanden zunächst unabhängig voneinander, worauf eine Zeit mehrfacher gegenseitiger Anregung folgte. Mehr nebenbei, im Zusammenhang mit andern Problemen, haben die Eigebilde natürlich auch von anderen Seiten schon gelegentliche Beachtung gefunden.**)

Bei alledem fehlt es noch immer an einer Arbeit, welche die Fundamentalsätze über die Eigebilde, von einer einzigen Definition ausgehend, zugleich übersichtlich, strenge und vollständig zusammenstellt. Es kann nicht meine Absicht sein, hier diese Lücke auszufüllen. Ich gebe nur kurz an, was ich aus der Theorie der Eigebilde im folgenden als bekannt voraussetze, nebst einigen erläuternden Zusätzen.

14. Ein Eigebiet ist definiert als ein innerhalb endlicher Grenzen liegendes***) Punktgebiet, dem jede gerade Verbindungsstrecke zweier zu ihm gehörigen Punkte vollständig angehört.

Die Möglichkeit solcher Gebiete von beliebig hoher Dimensionszahl läßt sich leicht nachweisen durch Betrachtung der geraden Strecke, des Quadrates, des Würfels und der entsprechenden höheren Gebiete, oder auch

---

*) Über Geometrie der Zahlen (Jahresber. d. Deutsch. Math.-Ver. I, 1890/91, S. 64); Geometrie der Zahlen (1. Lief., Leipzig bei Teubner, 1896); Allgemeine Lehrsätze über die konvexen Polyeder (Nachr. d. k. Ges. d. Wiss. zu Göttingen, m.-ph. Kl. 1897, S. 1); Volumen und Oberfläche (Math. Ann. Bd. 57, S. 447).

**) Vergl. z. B. einen Satz von *Weierstraß* in *Hermite*, Cours lit. 4. Ed. pag. 62 u. f. und *P. Kirchberger*, Über *Tchebychef*sche Annäherungsmethoden, Inaug.-Diss. Göttingen 1902, Kap. IV.

***) Jene ins Unendliche sich erstreckenden Gebilde, die sich zu den nach obiger Definition aufs Endliche beschränkten Eigebilden verhalten wie die Hyperbeln und Parabeln zu den Ellipsen, haben bis jetzt kaum Beachtung und Verwendung gefunden.

an dem Kreis, der Kugel und den „Äquiradialen" überhaupt, wie wir die analogen Gebiete beliebiger Räume allgemein benennen wollen.

15. Hier wird der von Herrn *G. Cantor* geschaffene, von Herrn *H. Minkowski* in die Theorie der Eigebilde*) eingeführte Begriff der „abgeschlossenen" Punktmenge wichtig, der von den früheren Geometern meist weniger bewußt und deutlich in den Begriff einer „Figur" mit hineingezogen wurde, indem sie den Kontur, die Begrenzungsfläche usw. stillschweigend als mit zur Figur gehörig voraussetzten. Abgeschlossen heißt eine Punktmenge, wenn sie jeden Punkt mitenthält, dem sich eine unendliche Reihe von Punkten, die ihr angehören, als ihrem Grenzpunkte nähert.

Es ist kein zwingender Grund vorhanden, Eigebiete als „abgeschlossene" Punktmengen zu definieren. Die Abgeschlossenheit oder Nichtabgeschlossenheit erscheint mir neben der definierenden Eigenschaft oben durchaus sekundären Charakters. Indessen für eine erste Bearbeitung des Themas ist die Beschränkung auf *abgeschlossene* Eigebiete ratsam; ihre Behandlung muß die Grundlage bilden für die Behandlung der anderen und aus vielen auf sie bezüglichen Sätzen werden ohne weiteres die entsprechenden für unabgeschlossene Eigebiete ableitbar sein, vor allem für solche, welche aus den abgeschlossenen durch Weglassung der *ganzen* Begrenzung entstehen. Auch Eigebiete mit unvollständig vorhandener, bezw. weggelassener Begrenzung gibt es natürlich; ich wüßte aber nicht, daß sie bisher sich in den Vordergrund gedrängt hätten; sollte dies andererseits einmal geschehen, so ist denkbar, daß die Probleme von umständlicher Natur sich erweisen wegen der vielen Möglichkeiten, die bei der Unvollständigkeit der Begrenzung sich ergeben, besonders in höheren Räumen. Beides sind Gründe, diese Art von Gebieten vorerst beiseite zu lassen. Wir werden also im folgenden, wenn nichts besonderes bemerkt wird, unter Eigebieten abgeschlossene Eigebiete verstehen.

16. Jedes abgeschlossene oder unabgeschlossene Eigebiet $\mathfrak{E}$ hat in dem von ihm „aufgespannten" Raume,**) d. h. dem linearen Raume niedrigster Dimension, der zu seiner Existenz notwendig ist, innere Punkte, vorausgesetzt, daß es sich nicht auf einen einzigen Punkt reduziert, in welchem Fall von einem Unterschiede an Punkten des aufgespannten Raumes über-

*) Vergl. Geom. d. Zahlen, S. 18.

**) Diesen Ausdruck habe ich vorgeschlagen in der Boltzmannfestschrift S. 94.

haupt nicht die Rede sein kann, da der Raum nur aus dem einen Punkte besteht.

17. Um einen innern Punkt von 𝔈 als Mittelpunkt liegt stets ein Äquiradialgebiet von ebensoviel Dimensionen wie 𝔈 mit endlichem Radius $\varrho$, welches ganz zu 𝔈 gehört.

18. Begrenzungspunkte eines Eigebietes 𝔈 sind solche, die entweder zu 𝔈 gehören und in beliebiger Nähe Punkte liegen haben, die nicht zu 𝔈 gehören, oder solche, die nicht zu 𝔈 gehören, und in beliebiger Nähe Punkte liegen haben, die zu 𝔈 gehören. Die zweite Sorte kann bei völlig abgeschlossenen Eigebieten nicht vorkommen.

19. Als Stützhauptlinear oder kurz Stützlinear*) einer beliebigen Punktmenge $P$ bezeichne ich jedes Hauptlinear**) des Raumes $R$, in welchem $P$ als enthalten aufgefaßt wird, das auf seiner einen Seite gar keinen Punkt von $P$ liegen hat, im übrigen entweder selbst (mindestens) einen Punkt von $P$ enthält, oder — dies kann sich nur auf nicht völlig abgeschlossene Punktmengen beziehen — wenigstens Punkte von $P$ in beliebiger Nähe auf seiner andern Seite liegen hat. Für $P$ gibt es in jeder beliebigen Richtung zwei und nur zwei getrennte Stützlineare, wenn $P$ den Raum $R$ aufspannt; ist der von $P$ aufgespannte Raum um eine, zwei, drei usw. Stufen niedriger als $R$, so gibt es bezw. in *einer* Richtung, in einer einfach unendlichen, zweifach unendlichen usw. Mannigfaltigkeit von Richtungen nur je *ein* Stützlinear („zwei zusammenfallende Stützlineare"). Werden nacheinander verschiedene Räume, in denen $P$ liegt, in Betracht gezogen, so ist, um Verwechslungen zu vermeiden, stets anzugeben, in welchem Raume die Stützlineare gemeint sind.

20. Ein Stützlinear kann nur Begrenzungspunkte, nie innere Punkte von $P$ enthalten.

21. Durch jeden Begrenzungspunkt eines Eigebietes 𝔈 geht (mindestens) *ein* Stützhauptlinear jedes linearen Raumes, der 𝔈 enthält.***)

22. Die gerade Verbindungsstrecke zweier innern Punkte oder eines innern und eines Begrenzungspunktes von 𝔈 enthält im übrigen lauter innere

---

*) Im Anschluß an *Minkowski*, Geom. d. Zahlen, S. 13. Meine in der *Boltzmann*festschrift S. 103/4 gegebene Definition möchte ich in obiger Weise modifizieren.

**) Vergl. *Boltzmann*festschrift S. 94.

***) Elemente für einen allgemeinen Beweis bei *Minkowski*, Geometrie der Zahlen, S. 33—36.

Punkte von 𝔈, die gerade Verbindungsstrecke zweier Begrenzungspunkte enthält im übrigen entweder lauter innere oder lauter Begrenzungspunkte.

23. Eine Gerade hat mit 𝔈 entweder eine Strecke, oder einen Punkt, oder keinen Punkt gemein, mit dem begrenzenden Eigebilde $E$ (der Gesamtheit der Begrenzungspunkte) entweder zwei Punkte, oder eine Strecke, oder einen Punkt („zwei zusammenfallende Punkte") oder keinen Punkt.*) Jede von einem innern Punkt des Eigebietes ausgehende Halbgerade hat einen und nur einen Punkt mit der Begrenzung $E$ des Eigebietes gemein. Überhaupt hat ein Linear (d. h. ein aus dem Raum, in welchem das Eigebilde betrachtet wird, durch lineare Gleichungen zwischen den Koordinaten herausgehobenes Gebilde) mit 𝔈 stets wieder ein Eigebiet, mit der Begrenzung $E$ ein Eigebilde oder ein Eigebiet gemein. Unter die Eigebiete sind als einfachste Repräsentanten der einzelne Punkt und die gerade Strecke, unter die Eigebilde der einzelne Punkt und das Punktpaar zu rechnen.

24. Zwei Eigebilde sind identisch, wenn ihre entsprechenden (d. h. parallelen, nach der nämlichen Seite liegenden) Stützlineare es sind.

25. Das ein Ovalgebiet mit inneren Punkten begrenzende Oval ist eine in sich zurücklaufende, stetig zusammenhängende, sich selbst nicht schneidende Linie, deren Punkte eine unzweideutige, in zwei Sinnen durchschreitbare Reihenfolge aufweisen. In Analogie dazu wird man als Reihenfolge der Punkte eines Ovals, das *keine inneren* Punkte enthält, sondern sich auf eine gerade Strecke reduziert, die (ebenfalls in doppelter Weise durchschreitbare) Reihenfolge ansehen, welche man erhält, wenn man die gerade Strecke einmal hin und dann wieder zurück durchläuft.

Auch die Stützgeraden eines Ovals — wie jeder ebenen Figur — bilden eine in sich geschlossene, stetige, unzweideutige, in zwei Sinnen durchschreitbare Reihenfolge.

26. Wir haben oben (11.—12.) den Satz erhalten:

*Gehören die komplexen Größen*

$$a_0 \equiv A_0,\ a_0 + a_1 \equiv A_1, \ldots\ a_0 + a_1 + \cdots + a_n \equiv A_n$$

*zu einem Wertgebiet 𝔈, das in gewöhnlicher Weise (in einem Raum von genügend viel Dimensionen) geometrisch repräsentiert ein Eigebiet ist, so gehört*

*) Ist 𝔈 nicht völlig abgeschlossen, so ist auch die gemeinsame Strecke unter Umständen nicht völlig abgeschlossen, d. h. unter Ausschluß eines oder beider Endpunkte zu verstehen.

*auch die Größe*

$$a_0+\varepsilon_1 a_1+\varepsilon_2 a_2+\cdots+\varepsilon_n a_n$$

*für*

$$1 \geqq \varepsilon_1 \geqq \varepsilon_2 \geqq \varepsilon_3 \geqq \cdots \geqq \varepsilon_n \geqq 0$$

*zu diesem Gebiete* $\mathfrak{E}$.*)

27. Die folgende noch stärker geometrisierte Darstellung des Satzes veranschaulicht ihn vielleicht noch besser und erleichtert die später nötig werdenden Schlüsse:

Die „Punkte" einer Zeile mit Index $i+1$ im Schema (2.) ergeben sich aus denen der Zeile mit Index $i$, indem man vom Punkte $(ii)$ aus alle folgenden Punkte der Zeile $i$ einer Ähnlichkeitstransformation mit dem i. A. verkleinernden, höchstens der Einheit gleichen Faktor $\frac{\varepsilon_{i+1}}{\varepsilon_i}$, wir wollen abkürzend sagen, der Transformation

$$\left[\frac{\varepsilon_{i+1}}{\varepsilon_i},\ (ii)\right] \tag{3.}$$

unterwirft. Es empfiehlt sich, das Eigebiet $\mathfrak{E}$ selbst in die Transformation mit eingeschlossen zu denken, wodurch es nach und nach in andere ähnliche, ähnlich gelegene Eigebiete $\mathfrak{E}^{(1)}, \mathfrak{E}^{(2)}, \mathfrak{E}^{(3)} \ldots$ übergeht. Es entsteht also allgemein $\mathfrak{E}^{(i+1)}$ aus $\mathfrak{E}^{(i)}$ durch die Transformation $\left[\frac{\varepsilon_{i+1}}{\varepsilon_i},\ (ii)\right]$.

28. Man sieht, daß

$$(i, i+l),\ \text{aufgefaßt als Punkt von } \mathfrak{E}^{(i)} \qquad (l=1,2,3\ldots n-i)$$

der Ähnlichkeit nach entspricht dem

$$(i+1, i+l),\ \text{aufgefaßt als Punkt von } \mathfrak{E}^{(i+1)},$$

allgemeiner dem

$$(i+k, i+l),\ \text{aufgefaßt als Punkt von } \mathfrak{E}^{(i+k)}. \qquad (l \geqq k \geqq 1)$$

29. Daraus folgt: Da die Punkte der Zeile 0 zu $\mathfrak{E}$ gehören, so müssen die der Zeile 1 zu $\mathfrak{E}^{(1)}$, die der Zeile 2 zu $\mathfrak{E}^{(2)}$ usw., schließlich muß der Punkt $(nn)$ zu $\mathfrak{E}^{(n)}$ gehören.

Von den Eigebieten $\mathfrak{E}^{(i+1)}$ gehört aber jedes ganz zum vorhergehenden $\mathfrak{E}^{(i)}$, weil das Ähnlichkeitszentrum jeweils zu dem der Transformation unter-

*) Wie ich sehe, tritt der Zusammenhang zwischen monotonen Reihen und einer speziellen Art von Eigebilden („Flächenzellen") auch bei Herrn *Minkowski* bereits an einer Stelle hervor, Geom. d. Zahlen, S. 15—16.

worfenen Eigebiete gehört, der Transformationsfaktor $\frac{\varepsilon_{l+1}}{\varepsilon_l}$ niemals vergrößert, und Eigebiete die bei 22 angeführten Eigenschaften haben.

Die sämtlichen Punkte des Schemas (2.), mit ihnen $(nn)$, gehören also zu $\mathfrak{E}$, und die sämtlichen Punkte $(i+k, i+l)$ gehören zu $\mathfrak{E}^{(i+1)}$.

30. Wir bemerken hier: Wenn man bei den positiven $\varepsilon$ den Wert 0 zuläßt, und es ist

$$\varepsilon_i = 0$$

das erste verschwindende $\varepsilon$, so wird, weil die $\varepsilon$ nicht zunehmen dürfen, für $l \geqq i$

$$\varepsilon = 0$$

$$(lk) = (i-1, i-1) \equiv a_0 + \varepsilon_1 a_1 + \varepsilon_2 a_2 + \cdots + \varepsilon_{-1} a_{i-1} \qquad (k \geqq l)$$

und, wie man sieht, bleiben die Resultate der mit den Zeilen $l$ vorgenommenen Transformationen

$$\left[\frac{\varepsilon_{l+1}}{\varepsilon_l}, (ll)\right] \qquad \text{(vgl. (3.))}$$

trotz der Unbestimmtheit der Transformationsfaktoren $\frac{\varepsilon_{l+1}}{\varepsilon_l}$ bestimmt.

31. Auf den Fall, wo $\varepsilon_0$ nicht gleich 1 ist, kommt man und erledigt ihn sofort, indem man kurz gesagt unsere sämtlichen Objekte vom Nullpunkt aus einer Ähnlichkeitstransformation mit einem beliebigen positiven Faktor $\varepsilon_0$ unterwirft. Die Punkte

$$(4.) \quad \begin{array}{l} \varepsilon_0 a_0,\ \varepsilon_0(a_0+a_1),\ \ \varepsilon_0(a_0+a_1+a_2),\ \ldots\ldots\ \varepsilon_0(a_0+a_1+a_2+a_3+\cdots\cdots+a_n) \\ \qquad \varepsilon_0 a_0+\varepsilon_0\varepsilon_1 a_1,\ \varepsilon_0 a_0+\varepsilon_0\varepsilon_1(a_1+a_2),\ \ldots\ \varepsilon_0 a_0+\varepsilon_0\varepsilon_1(a_1+a_2+a_3+\cdots+a_n) \\ \qquad\qquad \varepsilon_0 a_0+\varepsilon_0\varepsilon_1 a_1+\varepsilon_0\varepsilon_2 a_2,\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \qquad\qquad\qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \qquad\qquad\qquad \vdots \\ \qquad\qquad\qquad \varepsilon_0 a_0+\varepsilon_0\varepsilon_1 a_1+\varepsilon_0\varepsilon_2 a_2+\cdots+\varepsilon_0\varepsilon_n a_n \end{array}$$

oder — wenn man statt $\varepsilon_0 \varepsilon_i$ das kürzere $\varepsilon_i$ einführt — die Punkte:

$$(4^a.) \quad \begin{array}{l} \varepsilon_0 a_0,\ \varepsilon_0(a_0+a_1),\ \varepsilon_0(a_0+a_1+a_2),\ \ldots\ldots\ \varepsilon_0(a_0+a_1+a_2+a_3+\cdots\cdots+a_n) \\ \qquad \varepsilon_0 a_0+\varepsilon_1 a_1,\ \varepsilon_0 a_0+\varepsilon_1(a_1+a_2),\ \ldots\ \varepsilon_0 a_0+\varepsilon_1(a_1+a_2+a_3+\cdots\cdots+a_n) \\ \qquad\qquad \varepsilon_0 a_0+\varepsilon_1 a_1+\varepsilon_2 a_2,\ \ldots\ \varepsilon_0 a_0+\varepsilon_1 a_1+\varepsilon_2(a_2+a_3+\cdots+a_n) \\ \qquad\qquad\qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \qquad\qquad\qquad \vdots \\ \qquad\qquad\qquad \varepsilon_0 a_0+\varepsilon_1 a_1+\varepsilon_2 a_2+\cdots\cdots\cdots+\varepsilon_n a_n \end{array}$$

liegen dann sämtlich in dem Eigebiete, das aus $\mathfrak{E}$ durch die erwähnte Ähnlichkeitstransformation hervorgeht und daher passend durch das Symbol $\varepsilon_0\mathfrak{E}$ bezeichnet wird.

32. Einer feineren Ausarbeitung bedarf der Satz nun aber mit Bezug auf die Frage, inwieweit die Punkte auch auf der *Begrenzung* $E$ des Eigebietes $\mathfrak{E}$ liegen können.

*Hilfssatz. Es sei*

$$p \text{ ein innerer Punkt von } \mathfrak{E}$$

$$\textit{Entf.}\,(p, E) > \varrho \qquad \text{(vgl. 17)}$$

$$0 \leqq \varepsilon < 1$$

$$\left.\begin{matrix}\mathfrak{E}'\\ E'\end{matrix}\right\} \textit{durch Transf. } [\varepsilon, p] \textit{ entstanden aus } \left\{\begin{matrix}\mathfrak{E}\\ E\end{matrix}\right.$$

$$\left.\begin{matrix}e^*\\ e'\end{matrix}\right\} \textit{ein beliebiger Punkt auf} \left\{\begin{matrix}E\\ E'\end{matrix}\right.$$

*Dann gilt für die Entfernung beliebiger Punkte auf E und E' von einander:*

$$\overline{e'e^*} > (1-\varepsilon)\varrho \textit{ oder anders ausgedrückt } \textit{Entf.}\,(E', E) > (1-\varepsilon)\,\varrho.$$

33. Beweis. Wenn $\varepsilon = 0$ ist, fällt der Satz mit der Voraussetzung

$$\text{Entf.}\,(p, E) > \varrho$$

zusammen. Wenn $0 < \varepsilon < 1$ ist, ziehe man aus $p$ den geraden Strahl $pe'$ und nenne seinen Schnitt mit $E$ (vgl. 23), der über $e'$ hinausliegen muß, $e$. Die Ebene $pe'e^*$ — im Fall $E$ ein Oval ist, die Ebene des Ovals selbst — wird eine Schnittfigur wie Fig. 1 mit zwei ähnlichen, ähnlich gelegenen Ovalen enthalten (vgl. 23). Nach den Voraussetzungen über $p$ und $\varrho$ und nach den Eigenschaften der Ovale (vergl. 22.) liegen die in $e$ sich schneidenden Tangenten des mit $\varrho$ um $p$ geschlagenen Kreises von $e$ bis zu den Berührpunkten $a$ und $b$ sicher innerhalb $E$, mit ihnen das ganze Dreieck $eab$ und die aus dem Dreieck und dem austretenden Kreisteil $abc$ zusammengesetzte Figur $eacb$, die ähnliche kleinere, einen Teil von ihr bildende Figur $e\alpha\gamma\beta$, schließlich der einen Teil dieses Teils bildende Kreis $\alpha\beta\gamma$, der mit dem Radius $(1-\varepsilon)\varrho$ um $e'$ geschlagen ist. Der Punkt $e^*$ ist daher um mehr als die Strecke $(1-\varepsilon)\varrho$ von $e'$ entfernt, q. e. d.

Wenn $e^*$ mit $e$ identisch ist, darf für die nicht völlig bestimmte Ebene $pe'e^*$ oben jede Ebene genommen werden, welche einen außerhalb der Geraden $pe'$ liegenden Punkt von $\mathfrak{E}$ enthält. — Wenn $\mathfrak{E}$ eine gerade

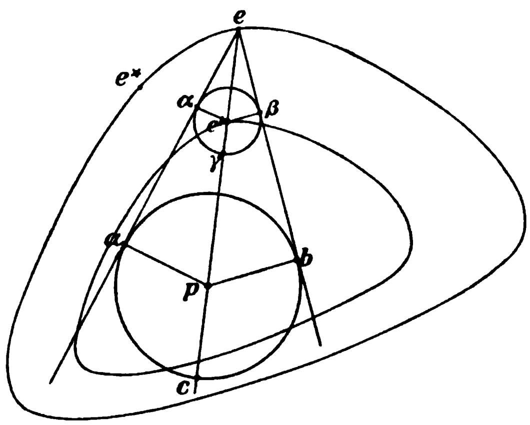



Fig. 1.

Strecke ist, gilt der Satz offenbar auch noch, obwohl der Wortlaut des Beweises oben nicht mehr ganz zutrifft. $E$ reduziert sich dann auf die zwei Endpunkte der Strecke.

Wir geben einige Zusätze zu unserm Satze, welche außer der Bedingung

$$0 \leqq \varepsilon < 1$$

alle Voraussetzungen ungeändert lassen.

34. *Zusatz. Für*

$$0 \leqq \varepsilon \leqq 1$$

*kommt*

$$\overline{e'e^*} \geqq (1-\varepsilon)\varrho$$

*in dem Sinne, daß das Gleichheitszeichen nur für* $\varepsilon = 1$ *eintreten kann, aber natürlich nicht muß.*

35. *Zusatz. Ist r das Minimum der Entfernung des Punktes p von E, so gilt, wenn*

$$0 < \varepsilon < 1$$

(*und umsomehr, wenn* $0 \leqq \varepsilon < 1$ *oder* $0 < \varepsilon \leqq 1$ *oder* $0 \leqq \varepsilon \leqq 1$) *die Ungleichung*

$$\overline{e'e^*} \geqq (1-\varepsilon)r,$$

*wie man unter Zuhilfenahme der folgenden Figuren, durch welche die Möglichkeit der Geltung des Gleichheitszeichens erläutert wird, leicht erkennt:*

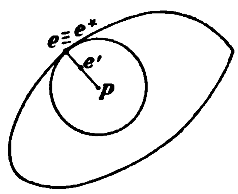



Fig. 2.

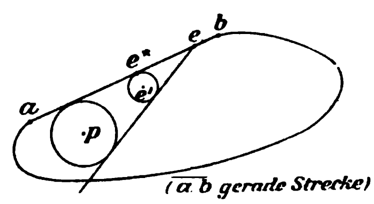



Fig. 3.

36. *Die vorstehende Ungleichung bleibt auch noch in Geltung, wenn p vom Innern des Eigebildes E auf das Eigebilde selbst rückt und hat dann den banalen Sinn:*

$$\overline{e'e^*} \geqq 0$$

37. *Satz.* *Wenn*

$$0 \leqq \varepsilon \leqq 1,$$

*$i'$ ein beliebiger Punkt innerhalb $E'$ (sonst alles wie bei 32), so ist*

$$\overline{i'e^*} > (1-\varepsilon)r.$$

38. Denn es ist

$$\overline{i'e'} > \varrho \qquad \text{(vgl. 17)},$$

$\varrho$ eine endliche von Null verschiedene positive Größe,

$$\overline{e'e^*} \geqq (1-\varepsilon)r \qquad \text{(vgl. 35)},$$

also

$$\overline{i'e^*} > (1-\varepsilon)r + \varrho.$$

39. Indem wir nun unsern Hauptzweck wieder mehr ins Auge fassen, stellen wir den Satz auf:

*Wenn in Schema (2.) bezw. in der Darstellung 27 ein Transformationszentrum $(ii)$ innerhalb $E$ liegt und*

$$\textit{Entf.}\,((ii), E) > \varrho \qquad \text{(vgl. 17)}$$

*sowie*

$$1 > \frac{\varepsilon_{i+1}}{\varepsilon_i} > 0$$

*ist, so liegen die sämtlichen Punkte*

$$(i+k,\, i+l) \qquad {\scriptstyle (k=1,2,3\ldots n-i;\; l \geqq k)}$$

*der folgenden Zeilen des Schemas ebenfalls innerhalb $E$ und es ist*

$$\textit{Entf.}\,((i+k,\, i+l), E) > \left(1-\frac{\varepsilon_{i+1}}{\varepsilon_i}\right)\varrho.$$

40. Beweis. Vorbemerkung:

(5.) $\left.\begin{matrix}E\\ \mathfrak{E}\end{matrix}\right\}$ gehe durch Transf. $\left[\frac{\varepsilon_{i+1}}{\varepsilon_i},\, (ii)\right]$ über in $\left\{\begin{matrix}E_{(i+1)}\\ \mathfrak{E}_{(i+1)}\end{matrix}\right.$.

Nach 29 hat man

(6.) $(i+k,\, i+l)$ gehört zu $\mathfrak{E}^{(i+1)}$

(7.) $\mathfrak{E}^{(i)}$ gehört zu $\mathfrak{E}$.

Durch die Transformation $\left[\frac{\varepsilon_{i+1}}{\varepsilon_i}, (ii)\right]$ folgt aus (7.)

$$(7^a.) \qquad \mathfrak{E}^{(i+1)} \text{ gehört zu } \mathfrak{E}_{(i+1)}.$$

Nach 32 und 37 ist

$$(8.) \qquad \text{Entf.}\ (\mathfrak{E}_{(i+1)}, E) > \left(1 - \frac{\varepsilon_{i+1}}{\varepsilon_i}\right)\varrho.$$

Aus (6.) und (7ª.) folgt

$$(i+k,\ i+l) \text{ gehört zu } \mathfrak{E}_{(i+1)}$$

und daraus im Zusammenhalt mit (8.)

$$\text{Entf.}\ ((i+k,\ i+l),\ E) > \left(1 - \frac{\varepsilon_{i+1}}{\varepsilon_i}\right)\varrho.$$

q. e. d.

41. Es läßt sich weiter von dem Schema (2.) folgendes aussagen: *Aus*

$$(kl) \text{ auf } E \qquad (k \leqq l \leqq n)$$

*folgt entweder*

$$\left.\begin{matrix}(0\,l)\\(1\,l)\\(2\,l)\\(3\,l)\\ \vdots \\(k-1,\ l)\end{matrix}\right\} \text{auch auf } E$$

*oder*

$$\varepsilon_k = 0,$$

*in welch letzterem Falle alle unter der $(k-1)$-ten Zeile liegenden Punkte identisch werden mit $(k-1,\ k-1)$.* (vergl. 30.)

42. Beweis. $(kl)$ entsteht durch Transf. $\left[\frac{\varepsilon_k}{\varepsilon_{k-1}},\ (k-1,\ k-1)\right]$ aus $(k-1,\ l)$, $(kl)$ liegt also auf der geraden Strecke $\overline{(k-1, k-1)(k-1, l)}$. Bezüglich $\varepsilon_k$ hat man nun drei Möglichkeiten:

$$\alpha)\ \varepsilon_{k-1} > \varepsilon_k > 0.$$

$(kl)$ ist in diesem Falle innerer Punkt der Strecke $\overline{(k-1,\ k-1)(k-1,\ l)}$,

was sich mit seiner Lage *auf* $E$ nach 22 nur verträgt, wenn auch jeder der Streckenendpunkte, somit

$$(k-1,\, l) \text{ auf } E$$

liegt.

$$\beta)\quad \varepsilon_k = \varepsilon_{k-1} > 0.$$

Da $(k-1,\, l)$ jetzt mit $(k,\, l)$ identisch wird, hat man auch in diesem Falle wieder

$$(k-1,\, l) \text{ auf } E.$$

$$\gamma)\quad \varepsilon_k = 0.$$

Nur in diesem Fall braucht $(k\quad 1,\, l)$ nicht auf $E$ zu liegen.

Wenn $\varepsilon_k$ von Null verschieden ist, kann man nun für $(k-1,\, l)$ die nämlichen Schlüsse machen wie eben für $(k,\, l)$ und zeigen, daß auch

$$(k-2,\, l) \text{ auf } E$$

liegen muß; $\varepsilon_{k-1} = 0$ ist jetzt ausgeschlossen, weil es $\varepsilon_k = 0$ nach sich ziehen würde. Und anschließend zeigt man, daß dann auch

$$(k-3,\, l) \text{ auf } E \text{ usw.},$$

schließlich

$$(0\, l) \text{ auf } E$$

liegt, worauf der Satz bewiesen ist.

43. In einem Schema, dessen Faktoren $\varepsilon$ sämtlich von Null verschieden sind, oder dessen Zeilenbildung beim Nullwerden eines Faktors $\varepsilon$ eingestellt wird, liegen also, wenn $(k l)$ auf $E$ liegt, die überstehenden Punkte der Kolonne $l$ sämtlich auch auf $E$.

44. *Satz. Wenn*

$$1 > \varepsilon_1 > \varepsilon_2 > \varepsilon_3 \ldots > \varepsilon_n > 0$$

*und*

$$(\nu\nu) \text{ auf } E, \qquad 0 \leqq \nu < n)$$

*so liegen alle Punkte der* $\nu + 1$ *ersten Kolonnen*

$$(k l) \text{ auf } E$$

$$(l = 0, 1, 2, 3 \ldots \nu;\ 0 \leqq k \leqq l)$$

*und zwar auf einem einzigen Stützlinear in dem Sinne, daß mindestens ein Stützlinear* $S$ *von* $E$ *existiert, das sie alle enthält.*

45. **Beweis.** Aus

$$(\nu\nu) \text{ auf } E$$

folgt

$$(\mu\mu) \text{ auf } E, \qquad (\mu < \nu)$$

denn läge ein einziger dieser Punkte $(\mu\mu)$ innerhalb $E$, so müßte nach 29 auch $(\nu\nu)$ innerhalb $E$ liegen. Liegt aber $(\mu\mu)$ auf $E$, so liegen nach 43 die Punkte der ganzen Kolonne $\mu$ auf $E$.

46. Der Beweis der zweiten Behauptung unseres Satzes erfordert mehr Umstände und wird erst mit 52[a] vollendet sein. Aus

$$(\nu\nu) \text{ auf } E$$

folgt (vgl. $42_a$),

$$(9.) \qquad (\nu-1, \nu-1) \text{ und } (\nu-1, \nu) \text{ auf } E$$

und hieraus vermittelst 22, daß die ganze im folgenden $R_1$ genannte Strecke

$$(10.) \qquad \overline{(\nu-1, \nu-1)(\nu-1, \nu)} \text{ auf } E$$

liegt. Aus (9.) folgt analog (vgl. $42_a$),

$$(\nu-2, \nu-2), \ (\nu-2, \nu-1), \ (\nu-2, \nu) \text{ auf } E.$$

Ein beliebiger Punkt $q$ der geraden Strecke $\overline{(\nu-2, \nu)(\nu-2, \nu-1)}$ (vgl. Fig. 4) kann demnach (vgl. 22) nur innerhalb oder auf $E$ liegen. Da aber die gerade Strecke, die ihn mit dem auf $E$ liegenden $(\nu-2, \nu-2)$ verbindet, einen weitern auf $E$ liegenden Punkt enthält — nämlich den Schnittpunkt $p$ mit der zu

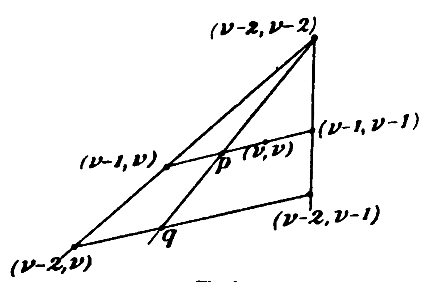


Fig. 4.

$$\overline{(\nu-2, \nu)(\nu-2, \nu-1)}$$

parallelen, aus ihr durch Ähnlichkeitstransformation mit einem zwischen 0 und 1 liegenden Faktor hervorgehenden, ganz auf $E$ nachgewiesenen Strecke

$$\overline{(\nu-1, \nu)(\nu-1, \nu-1)}$$

— so kann $q$ nach 22 nicht innerhalb, sondern muß auf $E$ liegen. Daraus folgt wieder, daß die ganze Strecke

$$\overline{(\nu-2, \nu-2)q} \text{ auf } E$$

und hieraus, da $q$ beliebig auf der Strecke $\overline{(\nu-2,\nu)(\nu-2,\nu-1)}$, daß die ganze im folgenden mit $R_2$ abgekürzte Dreiecksfläche

$$(11.)\qquad \overline{(\nu-2,\nu-2)(\nu-2,\nu-1)(\nu-2,\nu)}\ \text{auf}\ E$$

liegt. Analog ergibt sich weiter, daß auch der Tetraëderkörper $R_3$ und die vollen, „linear" begrenzten Gebiete $R_4, R_5 \ldots R_\nu$, anders ausgedrückt, daß

$$(12.)\quad \left\{\begin{array}{l} \overline{(\nu-3,\nu-3)(\nu-3,\nu-2)(\nu-3,\nu-1)(\nu-3,\nu)} \\ \overline{(\nu-4,\nu-4)(\nu-4,\nu-3)(\nu-4,\nu-2)(\nu-4,\nu-1)(\nu-4,\nu)} \\ \vdots \qquad\qquad \vdots \qquad\qquad \vdots \\ \overline{(00)(01)(02)(03)\ldots\ldots\ldots\ldots(0\nu)} \end{array}\right\}\ \text{auf}\ E$$

liegen.

Eingeschobene Bemerkungen über die Gebiete $R$.

47. $R_\nu$ ist allgemein das Punktgebiet aller geraden Strecken, die von den Punkten des Gebietes $R_{\nu-1}$ nach einem weiteren gegebenen Punkte laufen. Durch diese „rekurrente" Erzeugungsweise ist $R_\nu$ völlig bestimmt, da $R_1$ als gerade Strecke bekannt gegeben wurde.

48. Die $R$ — leichterweislich selbst Eigebilde — bezeichnet Herr *Minkowski*, sobald ihre Dimensionszahl mit ihrem Index übereinstimmt, als „Zellen" und man vergleiche seine Behandlung derselben, Geom. d. Zahlen S. 16 u. ff.

49. Als Gesamtheit von Punkten, die aus gegebenen Punkten durch wiederholte Sehnenziehung abgeleitet werden können und als Eigebiete, die mittels dieser Erzeugung durch die gegebenen Punkte eindeutig bestimmt sind, habe ich sie besprochen in einem Aufsatze der *Boltzmann*-Festschrift, S. 94—104, den man zur Ergänzung hier beiziehen mag. Wir können daher im folgenden von einem solchen $R_\nu$ auch sprechen als von dem durch gewisse gegebene Punkte *bestimmten* Eigebiet.

50. Um die Einschlägigkeit meiner dortigen Untersuchungen für die vorliegenden zu verstehen, muß man sich die auch bei Herrn *Minkowski* schon hervortretende Äquivalenz der Formen

$$(13.)\quad a_0+\varepsilon_1 a_1+\varepsilon_2 a_2+\cdots+\varepsilon_n a_n \qquad (1\geqq\varepsilon_1\geqq\varepsilon_2\geqq\varepsilon_3\ldots\geqq\varepsilon_n\geqq 0)$$

und

$$(14.)\quad \alpha_0 A_0 + \alpha_1 A_1 + \alpha_2 A_2 + \cdots + \alpha_n A_n \quad (\Sigma \alpha_i = 1;\ 1 \geqq \alpha_i \geqq 0) \quad {\scriptstyle (i=0,1,2,\ldots n)}$$

zum Bewußtsein bringen.

51. Dann erkennt man aber auch leicht, daß die sämtlichen Punkte der $\nu + 1$ ersten Kolonnen unseres Schemas dem durch die Ecken

$$(00),\ (01),\ (02) \ldots (0\nu),$$

d. h. dem durch die Punkte $A_0$, $A_1$, $A_2 \ldots A_n$ bestimmten $R_\nu$ angehören und sohin mit $R_\nu$ auf $E$ liegen.

---

52. Fortsetzung des Beweises 46. $R_\nu$ ist im allgemeinen ein Gebiet von $\nu$ Dimensionen. Das am Schluß von 46 gewonnene Ergebnis würde aber einen Widerspruch in sich schließen, sobald man dem Gebiet $R_\nu$ eine höhere Anzahl von Dimensionen zuerkennen wollte als dem Gebilde $E$, da ein Gebiet höherer Stufe niemals vollständig in einem Gebiet niedrigerer Stufe enthalten sein kann. Falls also $E$ ein Gebilde von weniger als $\nu$ Dimensionen ist, so muß auch $R_\nu$ infolge spezieller Lage seiner Eckpunkte seine Dimensionszahl reduzieren, mindestens bis zu der von $E$. Wenn z. B. $E$ $\nu - 1$ Dimensionen hat, so kann sich $R_\nu$ etwa dadurch auf $\nu - 1$ Dimensionen reduzieren, daß $(0\nu)$ in dem von $(00), (01), (02), \ldots (0, \nu - 1)$ aufgespannten Raume liegt, auf $\nu - 2$ Dimensionen etwa so, daß $(0, \nu - 1)$ und $(0, \nu)$ beide in dem von $(00), (01), (02) \ldots (0, \nu - 2)$ aufgespannten Raume liegen usw.

52[a]. Es ist nun zu zeigen, daß $R_\nu$ in einem Stützlinear $S$ (vgl. 19) von $E$ liegt.

$\alpha$) Wenn $R_\nu$ sich auf einen einzigen Punkt reduziert, indem entweder $\nu = 0$ oder $a_1 = a_2 = \cdots = a_\nu = 0$ wird, so ist unsere Behauptung mit Satz 21 identisch.

$\beta$) Wenn $R_\nu$ sich nicht auf einen Punkt reduziert, so hat es in dem von ihm aufgespannten Raume $L$ sicher einen innern Punkt $r$, durch den, als einen Punkt von $E$, ein Stützlinear $S$ von $E$ geht (vgl. 21). $S$ muß nun $L$ ganz in sich enthalten; denn im andern Falle müßte $S$ das Linear $L$ schneiden und würde einen Teil der von $r$ ausgehenden, in $L$ liegenden Halbstrahlen auf seiner einen, den andern auf seiner andern Seite liegen haben; jeder solche Halbstrahl enthält aber Punkte von $R_\nu$, somit auch von $E$; es würden Punkte von $E$ zu verschiedenen Seiten von $S$ liegen, was seinem

Stützlinearcharakter (vgl. 19) widerspricht. $S$ muß also $L$, und damit $R_\nu$ in sich enthalten.

53. Eine Umkehr von Satz 44.

*Wenn*

$$1 > \varepsilon_1 > \varepsilon_2 > \varepsilon_3 \ldots > \varepsilon_n > 0$$

*ist, und die Punkte*

$$(00), (01), (02) \ldots (0\nu) \begin{cases} auf\ E \\ auf\ S \end{cases}$$

*liegen, wobei $S$ ein Stützlinear von $E$ bedeutet, so liegt das ganze von den Ecken*

$$(00), (01), (02) \ldots (0\nu)$$

*bestimmte lineare Punktgebiet*

$$R_\nu \begin{cases} auf\ E \\ auf\ S \end{cases}$$

*mit ihm sämtliche Punkte der $\nu + 1$ ersten Kolonnen unseres Schemas, vor allem liegt auch*

$$(\nu\nu)\ auf\ E.$$

54. Beweis. Alle Punkte von $R_\nu$ können durch wiederholtes Sehnenziehen aus den gegebenen Punkten $(00)$, $(01)$, $(02) \ldots (0\nu)$ abgeleitet werden, vergl. die vorhin beim Absatz 49 gemachte Bemerkung, und liegen daher sicher in dem von $(00), (01), (02) \ldots (0\nu)$ ausgespannten Linear, dieses seinerseits in $S$. Sie liegen aber zugleich auf $E$; denn beginnen wir mit der Sehnenziehung zwischen den gegebenen Punkten, etwa zwischen $(00)$ und $(01)$, so ist doch ersichtlich, daß die ganze Sehne $\overline{(00)(01)}$ erstens zu $S$, zweitens zu $\mathfrak{E}$ gehört; da aber $S$ nur Punkte der Begrenzung $E$ von $\mathfrak{E}$ enthält (vgl. 20), so liegt die Sehne völlig auf $E$; analog ist der Beweis für die Sehnen höherer Ordnung (vgl. auch weiter hinten 196). Also $R_\nu$ liegt ganz auf $E$; zu $R_\nu$ gehören aber alle Punkte der $\nu + 1$ ersten Kolonnen (vgl. 51).

55. Ergänzen wir nun unsere Betrachtungen, indem wir die in Satz 44 ausgeschlossene Gleichheit aufeinanderfolgender $\varepsilon$ zulassen, übrigens die Bedingung $\varepsilon_n > 0$ festhalten, und erörtern wir ein abgekürztes Schema (2.), das nur die $\nu + 1$ ersten Kolonnen enthält. Zunächst seien in ihm nur zwei aufeinanderfolgende $\varepsilon$ gleich:

$$\varepsilon_i = \varepsilon_{i+1},$$

dann sind offenbar die Punkte

$$(i, i+1)\,(i, i+2)\,(i, i+3)\ldots(i, \nu)$$

resp. gleich den im Schema unter ihnen stehenden

$$(i+1, i+1)\,(i+1, i+2)\,(i+1, i+3)\ldots(i+1, \nu)$$

und wenn man die Zeile $i$ und die Kolonne $i$ *) völlig streicht, entsteht ein neues Schema, welches man leichtersichtlicher Weise aus den Elementen

$$a_0, a_1, a_2, a_3 \ldots a_{i-1},\ (a_i + a_{i+1}),\ a_{i+2}, a_{i+3} \ldots a_2$$

und den Koeffizienten

$$1, \varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3 \ldots \varepsilon_{i-1},\ \varepsilon_i,\ \varepsilon_{i+2}, \varepsilon_{i+3} \ldots \varepsilon_\nu$$

entstanden betrachten kann. In diesem neuen Schema ist dann kein $\varepsilon$ mehr gleich dem folgenden und es lassen sich alle gemachten Schlüsse von 44 bis 54 darauf anwenden.

56. Sollte aber im alten Schema außer $\varepsilon_i = \varepsilon_{i+1}$ noch eine weitere Gleichheit aufeinanderfolgender $\varepsilon$ vorhanden gewesen sein, so wird sie sich auch in dem neuen noch vorfinden. Wir behandeln dann das zweite Schema ebenso wie das erste und erhalten ein drittes Schema, in dem nun auch die zweite Koeffizientengleichheit verschwunden sein wird, und so fahren wir im Notfall fort, bis schließlich ein Schema erreicht wird, in dem kein $\varepsilon$ mehr dem folgenden gleich ist. Der Fall, wo alle $\varepsilon$ gleich 1 sind, nimmt eine gewisse Ausnahmestellung ein, insofern man schließlich auf ein einziges Glied $a_0 + a_1 + \cdots + a_\nu$ kommt; es werden aber dann überhaupt alle Behauptungen, die wir beweisen wollen, selbstverständlich. Von diesem Falle abgesehen erhält man immer ein dreieckiges Schema mit durchweg fallenden $\varepsilon$.

57. Eine Kolonne $K$ dieses Endschemas enthält immer die nämlichen Glieder, wie die Kolonne $K'$ des ursprünglichen Schemas, die das nämliche Kopfglied hat, aber jedes Glied nur einmal, während in $K'$ untereinanderstehende Glieder gleich sein können. Erhalten haben sich die Kolonnen mit dem Index

$$\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \ldots \lambda_{\mu-1}, \lambda_\mu,$$

---

*) Kurzer Ausdruck für: die Zeile, deren Punktsymbole den ersten Index $i$, und die Kolonne, deren Punktsymbole den zweiten Index $i$ haben.

wenn $\lambda_0, \lambda_1, \ldots \lambda_{\mu-1}$ die Werte von $\lambda < \nu$ sind, für welche

$$\varepsilon_\lambda > \varepsilon_{\lambda+1}$$

war, und wenn

$$\lambda_\mu \equiv \nu$$

ist.

58. Kurz, man erkennt:

*Alles, was wir von 44 bis 54 für das Schema mit lauter ungleichen* $\varepsilon$

$$(15.)\quad \begin{cases} (00)\,(01)\,(02)\,.\,.\,(0\nu) \\ \qquad (11)\,(12)\,.\,.\,(1\nu) \\ \qquad\quad \cdots\cdots\cdots \\ \qquad\qquad \cdots\cdots \\ \qquad\qquad\quad \cdots \\ \qquad\qquad\quad (\nu\nu) \end{cases}$$

*abgeleitet haben, gilt bei Zulassung einander gleicher Größen* $\varepsilon$ *für das Schema*

$$(16.)\quad \begin{cases} (\lambda_0\lambda_0)\,(\lambda_0\lambda_1)\,(\lambda_0\lambda_2)\,.\,.\,(\lambda_0\lambda_\mu) \\ \qquad (\lambda_1\lambda_1)\,(\lambda_1\lambda_2)\,.\,.\,(\lambda_1\lambda_\mu) \\ \qquad\quad \cdots\cdots\cdots \\ \qquad\qquad \cdots\cdots \\ \qquad\qquad\quad \cdots \\ \qquad\qquad\quad (\lambda_\mu\lambda_\mu) \end{cases}$$

*bezw. was früher für alle Kolonnen galt, gilt jetzt nur noch für ausgewählte,* wobei daran zu erinnern ist, daß zufolge der Bemerkung zu Anfang von 57 die Kolonnen

$$\begin{matrix} (\lambda_0\lambda_i) \\ (\lambda_1\lambda_i) \\ (\lambda_2\lambda_i) \\ \vdots \\ (\lambda_i\lambda_i) \end{matrix} \qquad \text{und} \qquad \begin{matrix} (0\lambda_i) \\ (1\lambda_i) \\ (2\lambda_i) \\ \vdots \\ (\lambda_i\lambda_i) \end{matrix}$$

nur in einem hier unwesentlichen Punkte verschieden sind.

59. Wir wollen der in den letzten Abschnitten gegebenen Verallgemeinerung der Sätze 44 und 53 eine zusammenfassende, mehr analytische Darstellung geben und fassen zunächst die Voraussetzungen in folgende Form:

Es liege ein Größengebiet (Raum) $R$ von $\tau$ unabhängigen Einheiten (Dimensionen) $e$ vor, in dem die Größen (Punkte) $a_i$ und somit auch die Größen

(17.) $$A_i \equiv \sum_0^i \varepsilon_\nu a_\nu = \alpha_1^{(i)} e_1 + \alpha_2^{(i)} e_2 + \cdots + \alpha_\tau^{(i)} e_\tau \qquad (i=0,1,2,3\ldots n)$$

überhaupt die unter der Voraussetzung

(18.) $$1 = \varepsilon_0 \geqq \varepsilon_1 \geqq \varepsilon_2 \geqq \varepsilon_3 \ldots \geqq \varepsilon_n > 0$$

gebildeten Größen unseres Schemas (2.) gelegen sind. Die $A$ sollen zu einem Eigebiet $\mathfrak{E}$ unseres Raumes gehören, dessen Begrenzung $E$ die Dimensionszahl $\tau - \sigma$ $(1 \leqq \sigma \leqq \tau)$ und die Gleichung $E(\alpha_1, \alpha_2 \ldots \alpha_\tau) = 0$ hat. Dann gilt der Satz:

60. *Es liegt*

$$(\lambda_\mu \dot{\lambda}_\mu) \equiv a_0 + \varepsilon_1 a_1 + \varepsilon_2 a_2 + \cdots + \varepsilon_{\lambda_\mu} a_{\lambda_\mu} \quad \textit{auf } E$$
$$(\lambda_\mu \equiv n)$$

*dann und nur dann, wenn jedes der Systeme von Koeffizienten (Koordinaten)*

(19.) $$\alpha_1^{(i)}, \alpha_2^{(i)}, \alpha_3^{(i)} \ldots \alpha_\tau^{(i)} \qquad (i = \lambda_0, \lambda_1, \lambda_2 \ldots \lambda_\mu, \text{ vgl. } 57).$$

*nicht nur die Gleichung*

(20.) $$E(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \ldots \alpha_\tau) = 0,$$

*sondern auch ein und dieselbe Gleichung*

(21.) $$S(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \ldots \alpha_\tau) = 0$$

*irgend eines Hauptstützlinears von E befriedigt. Hierfür ist notwendige Bedingung (vgl.* 52), *daß die Wertsysteme* (19.) *mindestens σ unabhängige lineare Gleichungen*

(22.) $$\begin{cases} \mathfrak{C}^{(1)} \equiv C_0^{(1)} + C_1^{(1)} \alpha_1 + C_2^{(1)} \alpha_2 + C_3^{(1)} \alpha_3 + \cdots + C_\tau^{(1)} \alpha_\tau = 0 \\ \mathfrak{C}^{(2)} \equiv C_0^{(2)} + C_1^{(2)} \alpha_1 + C_2^{(2)} \alpha_2 + C_3^{(2)} \alpha_3 + \cdots + C_\tau^{(2)} \alpha_\tau = 0 \\ \vdots \qquad \vdots \qquad \qquad \vdots \qquad \qquad \vdots \\ \mathfrak{C}^{(\sigma)} \equiv C_0^{(\sigma)} + C_1^{(\sigma)} \alpha_1 + C_2^{(\sigma)} \alpha_2 + C_3^{(\sigma)} \alpha_3 + \cdots + C_\tau^{(\sigma)} \alpha_\tau = 0 \end{cases}$$

*befriedigen, oder — was das nämliche bedeutet — daß die in der Matrix*

(23.) $$\| \alpha_1^{(i)}, \alpha_2^{(i)}, \ldots \alpha_\tau^{(i)} \| \qquad (i = \lambda_0, \lambda_1, \ldots \lambda_\mu)$$

*enthaltenen Determinanten sämtlich bis mindestens zur miteingeschlossenen Ordnung*

$$\tau - \sigma + 2$$

*herab verschwinden.**)

61. Das Stützlinear $S = 0$ durch die Punkte $A_\lambda$ wird sich sicher in der Form

$$c_1 \mathfrak{C}^{(1)} + c_2 \mathfrak{C}^{(2)} + c_3 \mathfrak{C}^{(3)} \cdots + c_\sigma \mathfrak{C}^{(\sigma)} = 0 \tag{24.}$$

darstellen lassen, wenn außer den Gleichungen (22.) keine weitere von ihnen unabhängige lineare Gleichung durch die Koeffizientensysteme (19.) befriedigt wird; wenn also die Determinanten $(\tau - \sigma + 1)$-ter Ordnung der Matrix (23.) nicht mehr alle verschwinden.

Im andern Fall müssen im allgemeinen außer den Gleichungen (22.) noch weitere von diesen und voneinander unabhängige durch die Wertsysteme (19.) befriedigte lineare Gleichungen

$$\mathfrak{C}^{(\sigma+1)} = 0, \qquad \mathfrak{C}^{(\sigma+2)} = 0 \ldots \text{usw.} \tag{25.}$$

beigezogen werden — im allgemeinen $\chi$ verschiedene, wenn die Determinanten der Matrix bis zur miteingeschlossenen Ordnung

$$\tau - \sigma + 2 - \chi$$

herab alle verschwinden — um das Stützlinear in der Form $\Sigma c \mathfrak{C} = 0$ darstellen zu können.

62. Am häufigsten wird der Satz zur Anwendung kommen in dem Fall, daß $\mathfrak{C}$ ebensoviel Dimensionen hat, wie unser Raum $R$, $E$ somit um eine weniger. Dann ist

$$\sigma = 1.$$

Es genügt dann, daß *eine* Gleichung

$$\mathfrak{C} = C_0 + C_1 \alpha_1 + C_2 \alpha_2 + \cdots + C_\tau \alpha_\tau$$

durch die Systeme (19.) erfüllt wird. Ist sie die *einzige* unabhängige ihrer Art, so muß sie zugleich das durch die $A_\lambda$ hindurchgehende Stützlinear darstellen, weil die Form (24.) sich auf

$$c \mathfrak{C} = 0$$

reduziert.

---

*) Bezüglich Verallgemeinerung des Satzes vgl. 31.

63. Ist z. B. unser Raum zweidimensional, $E$ ein Oval mit innern Punkten, und ist $\mu = 5$, so müssen die 6 Punkte

$$A_{\lambda_0},\ A_{\lambda_1},\ A_{\lambda_2},\ A_{\lambda_3},\ A_{\lambda_4},\ A_{\lambda_5}$$

außer auf $E$ auf einer Geraden $\mathfrak{G} = 0$ liegen, welche, wenn sie die einzige ihrer Art ist, zugleich Stützgerade von $E$ sein muß, wenn anders der Punkt

$$a_0 + \varepsilon_1 a_1 + \varepsilon_2 a_2 + \cdots + \varepsilon_{\lambda_5} a_{\lambda_5}$$

auf $E$ liegen soll. Existiert außer $\mathfrak{G} = 0$ eine andere Gerade $\mathfrak{G}' = 0$, welche die 6 Punkte $A_\lambda$ enthält — worauf hier die $A_\lambda$ in einen einzigen Punkte $p$ zusammenfallen —, so braucht $\mathfrak{G} = 0$ nicht Stützgerade zu sein, sondern die bezw. jede Stützgerade durch $p$ wird von der Form

$$c\mathfrak{G} + c'\mathfrak{G}' = 0$$

und $c'$ im allgemeinen von Null verschieden sein.

64. Nebenbei wollen wir noch bemerken, daß die Theorie der linearen Gleichungen leicht erkennen läßt: Wenn die Punkte

$$(26.)\qquad (\lambda_0\lambda_0)\,(\lambda_0\lambda_1)\,(\lambda_0\lambda_2)\ldots(\lambda_0\lambda_\mu)$$

auf einem Hauptlinear des Raumes $R$ liegen, so tun dies auch die Punkte

$$(27.)\qquad (\lambda_0\lambda_0)\,(\lambda_1\lambda_1)\,(\lambda_2\lambda_2)\ldots(\lambda_\mu\lambda_\mu);$$

und wenn die $\varepsilon$ alle von Null verschieden sind, wie wir bei 44, 53 und (18.) vorausgesetzt haben, so gilt auch umgekehrt: Wenn die Punkte (27.) auf einem Hauptlinear des Raumes $R$ liegen, so tun dies auch die Punkte (26.). Für von 0 verschiedene $\varepsilon$ bestimmen also beide Punktreihen das nämliche System hindurchgehender Hauptlineare, somit kann keine in einem Linear niedrigerer Ordnung enthalten sein, als die andere, oder:

*Die Punktreihen* (26.) *und* (27.) *spannen den nämlichen Raum auf.*

65. *Wenn*

$$\varepsilon_\mu = 0 \qquad (0 \leqq \mu \leqq n)$$

*und somit*

$$\varepsilon_\mu = \varepsilon_{\mu+1} = \varepsilon_{\mu+2} = \cdots = \varepsilon_n = 0$$

*ist, so ist*

$$\sum_0^n{}_k\, \varepsilon_k a_k = \sum_0^{n-1}{}_k\, \varepsilon_k a_k = \sum_0^{n-2}{}_k\, \varepsilon_k a_k = \cdots = \sum_0^{\mu}{}_k\, \varepsilon_k a_k = \sum_0^{\mu-1}{}_k\, \varepsilon_k a_k$$

*ein von den Größen* $a_\mu, a_{\mu+1} \dots a_n$ *unabhängiger Wert,* $(nn)$ *liegt auf* $\varepsilon_0 E$, *wenn* $(\mu-1, \mu-1)$ *darauf liegt. Und umgekehrt: Aus der Lage von* $(nn)$ *kann nichts erschlossen werden über die Lage von* $a_\mu, a_{\mu+1} \dots a_n$ *oder von* $A_\mu \equiv (0\mu)$, $A_{\mu+1} \equiv (0, \mu+1) \dots A_n \equiv (0, n)$.

66. Wir geben nun noch Sätze, die sich auf die Entfernung des Punktes $(nn)$ von $E$ beziehen.

*Wenn die Punkte* $(0i)$ *innerhalb* $E$ *liegen und*

$$\text{Entf.}\ ((0i), E) > \varrho_i \qquad (i = 0, 1, 2 \dots n)$$

*sowie*

$$1 \geqq \varepsilon_1 \geqq \varepsilon_2 \geqq \varepsilon_3 \dots \geqq \varepsilon_n \geqq 0 \tag{28.}$$

*ist, so liegt* $(nn)$ *innerhalb* $E$ *und ist*

$$\text{Entf.}\ ((nn), E) > \sum_{i=0}^{i=n-1} (\varepsilon_i - \varepsilon_{i+1}) \varrho_i + \varepsilon_n \varrho_n. \tag{29.}$$

67. Beweis. Daß $(nn)$ als Punkt von $\mathfrak{E}$ (vgl. 29) innerhalb $E$ liegen muß, wenn ihm eine Entfernung von $E$ nachgewiesen wird, ist klar. Es ist nun — man ziehe die bei 27 gegebene Definition von $E^{(1)}$, $E^{(2)}$ usw. zu Hilfe — die Entfernung der Punkte

$$(30.)\left\{\begin{array}{llllll}
(00), (01), (02) \dots (0n) & \text{von } E & \text{größer als resp.} & \varrho_0, & \varrho_1, \quad \varrho_2 \dots & \varrho_n \\
(11), (12) \dots (1n) & \text{,,}\ E^{(1)} & \text{,, ,, ,,} & & \varepsilon_1 \varrho_1, \quad \varepsilon_1 \varrho_2 \dots & \varepsilon_1 \varrho_n \\
(22) \dots (2n) & \text{,,}\ E^{(2)} & \text{,, ,, ,,} & & \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1} \cdot \varepsilon_1 \varrho_2 \dots & \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1} \cdot \varepsilon_1 \varrho_n \\
\vdots & \vdots & & & \vdots & \vdots \\
(nn) & \text{,,}\ E_n & \text{,, ,, ,,} & & & \varepsilon_n \varrho_n
\end{array}\right.$$

Es ist ferner nach 34 überall die gegenseitige Entfernung der Eigebilde

$$(31.)\left\{\begin{array}{lllll}
E_1 \text{ und } E & \text{mindestens gleich} & \varrho_0 & (1-\varepsilon_1) & = \varrho_0 \quad (1-\varepsilon_1) \\
E_2 \quad \text{,,} \quad E_1 & \text{,, ,,} & \varepsilon_1 \quad \varrho_1 & \left(1-\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}\right) & = \varrho_1 \quad (\varepsilon_1 - \varepsilon_2) \\
E_3 \quad \text{,,} \quad E_2 & \text{,, ,,} & \varepsilon_2 \quad \varrho_2 & \left(1-\frac{\varepsilon_3}{\varepsilon_2}\right) & = \varrho_2 \quad (\varepsilon_2 - \varepsilon_3) \\
\vdots & \vdots & & & \vdots \\
E_n \quad \text{,,} \quad E_{n-1} & \text{,, ,,} & \varepsilon_{n-1} \varrho_{n-1} & \left(1-\frac{\varepsilon_n}{\varepsilon_{n-1}}\right) & = \varrho_{n-1} (\varepsilon_{n-1} - \varepsilon_n)
\end{array}\right.$$

Schließlich ist nach (30.) die Entfernung von

$(nn)$ und $E_n$ größer als $\varepsilon_n \varrho_n = \varepsilon_n \varrho_n$.

Durch Summation ergibt sich:

$$\text{Entf.}((nn), E) > \varrho_{nn} \equiv \sum_0^{n-1} i\, \varrho_i (\varepsilon_i - \varepsilon_{i+1}) + \varepsilon_n\, \varrho_n \tag{29.}$$

q. e. d.

68. Sobald die $\varrho_i$ sämtlich gleich $\varrho$ werden, nimmt auch $\varrho_{nn}$ den Wert $\varrho$ an.

69. Im wesentlichen ebenso würde die nur leicht modifizierte Fassung des Satzes bewiesen werden können:

*Wenn die Punkte* $(0i)$ *innerhalb* $E$ *liegen und*

$$\textit{Entf.}((0i), E) = r_i \qquad (i = 0, 1, 2 \ldots n)$$

*ist, so ist*

$$\textit{Entf.}((nn), E) \geqq r_{nn} \equiv \sum_0^{n-1} i\, r_i (\varepsilon_i - \varepsilon_{i+1}) + \varepsilon_n\, r_n,$$

*wieder unter Voraussetzung* (28.).

### Bemerkung zum Schlusse dieses Abschnittes.

70. Den Ausgangspunkt der vorstehenden Untersuchungen bildete für mich das Streben, dem *Abel*schen Lemma einen anderen Beweis zuteil werden zu lassen, als den bekannten Transformationsbeweis, gegen den ich, seit ich ihn zum ersten Male als Student in einem *Kronecker*schen Kolleg gehört hatte, eine Antipathie empfand, über deren Grund ich später klar zu werden suchte. Ich hatte anfangs keine Ahnung, daß ich dabei auf die von mir schon besonders behandelten Eigebilde geführt werden würde. In seiner Ausarbeitung hat das abgeschlossene Kapitel Berührungspunkte bekommen mit manchen Ausführungen von Herrn *Minkowski* in seiner Geometrie der Zahlen. Es ist dort z. B. auch von Ähnlichkeitstransformationen („Dilatationen") Gebrauch gemacht, und der Zusammenhang zwischen Form (13.) und (14.) erwähnt,*) ohne daß, so viel ich sehe, später ein Anlaß sich ergäbe, auf Form (13.) wieder zurückzukommen. Form (14.) hat vor Form (13.) den augenfälligen Vorzug einer größeren Symmetrie ihrer Elemente voraus. Indem ich nun aber durch meinen Ausgangspunkt alles auf

*) Geom. d. Zahlen, S. 16.

die Form (13.) zu gründen veranlaßt war, ergaben sich für mich alle weiteren Entwicklungen dieser Arbeit, auf die man von der Form (14.) aus nicht so leicht geraten würde, als naturgemäße Fortsetzung.

#### Komplexe $a$, reelle monotone $\varepsilon$, Beginn.

71. Unsere Ergebnisse setzen uns in den Stand, Schlüsse zu ziehen auch für den Fall, daß die $\varepsilon$ nicht positive, nie steigende, sondern beliebig monotone reelle Größen sind.

### Nie steigende, aber nicht durchweg positive oder sich anullierende $\varepsilon$.

72. Für niemals steigende $\varepsilon$ wird die Reihe der Differenzen

(32.) $$\varepsilon_0-\varepsilon_n,\ \varepsilon_1-\varepsilon_n,\ \varepsilon_2-\varepsilon_n,\ \dots\ \varepsilon_{n-1}-\varepsilon_n,\ \varepsilon_n-\varepsilon_n$$

ebenfalls eine nirgends steigende sein und bis auf das letzte oder möglicherweise die letzten Null werdenden Glieder durchweg *positive* Werte enthalten. Es gilt nun

(33.) $$\sum_0^n{}_k(\varepsilon_k-\varepsilon_n)\,a_k-(-\varepsilon_n)\sum_0^n{}_k a_k=\sum_0^n{}_k\varepsilon_k a_k$$

eine Gleichung, die wir, um uns im folgenden vor Fehlschlüssen zu bewahren, besser so schreiben:

(34.) $$\sum_0^{n-1}{}_k(\varepsilon_k-\varepsilon_n)\,a_k-(-\varepsilon_n)\sum_0^n{}_k a_k=\sum_0^n{}_k\varepsilon_k a_k.$$

Nach 26 liegt nun der Punkt

(35.) $$\Sigma(\varepsilon_k-\varepsilon_n)a_k \text{ auf } (\varepsilon_0-\varepsilon_n)\mathfrak{E}$$

d. h. dem Eigebiete, das durch den positiven Transformator $\varepsilon_0-\varepsilon_n$ aus $\mathfrak{E}$ entsteht; und nach elementaren Ähnlichkeitssätzen liegt der Punkt

(36.) $$(-\varepsilon_n)\Sigma a_k \text{ auf } (-\varepsilon_n)\mathfrak{E}$$

d. h. dem Eigebiete, das durch den ebenfalls positiven Transformator $-\varepsilon_n$ aus $\mathfrak{E}$ entsteht.

Folglich liegt Punkt

(37.) $$\Sigma\varepsilon_k a_k \text{ auf dem Gebiet } \mathfrak{F}$$

jener Punkte, die entstehen durch Subtraktion eines beliebigen Punktes des Eigebietes $(-\varepsilon_n)\mathfrak{C}$ von einem beliebigen Punkte des Eigebietes $(\varepsilon_0-\varepsilon_n)\mathfrak{C}$. Mit derartigen Gebieten wollen wir uns nun, ehe wir diese besondere Untersuchung bei 129 fortführen, erst im allgemeinen bekannt zu machen suchen.

### Eingeschobenes Kapitel über Punktsummen- und Punktdifferenzgebiete.

73. Die durch Addition eines beliebigen Punktes $a$ des Gebietes $\mathfrak{A}$ und eines beliebigen Punktes $b$ des Gebietes $\mathfrak{B}$ entstehenden Punkte $a+b$ bedecken ein Gebiet, welches wir mit dem Namen „Punktsummengebiet aus $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$“ und dem Symbol

$$\mathfrak{A} \dot{+} \mathfrak{B} \tag{38.}$$

— gelesen „$\mathfrak{A}$ plus Punkt $\mathfrak{B}$“ — bezeichnen wollen.

74. Ganz analog sprechen wir von dem Gebiet der Punkte $a-b$ als dem „Punktdifferenzgebiet aus $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$“ und stellen es dar durch das Symbol

$$\mathfrak{A} \dot{-} \mathfrak{B} \tag{39.}$$

gelesen „$\mathfrak{A}$ minus Punkt $\mathfrak{B}$.“

75. Aus den Definitionen folgt:

$$\mathfrak{A} \dot{+} \mathfrak{B} \equiv \mathfrak{B} \dot{+} \mathfrak{A}, \tag{40.}$$

$$\mathfrak{A} \dot{-} \mathfrak{B} \equiv \mathfrak{A} \dot{+} (-\mathfrak{B}), \tag{41.}$$

$$\lambda(\mathfrak{A} \dot{+} \mathfrak{B}) \equiv \lambda\mathfrak{A} \dot{+} \lambda\mathfrak{B}, \tag{42.}$$

wenn unter $(-\mathfrak{B})$ das Gebiet der Punkte $(-b)$, unter $\lambda$ ein beliebiger positiver oder negativer Faktor (Transformator) verstanden wird (vgl. 112)*).

76. Ein Punktsummengebiet aus gegebenen Gebieten ist daher stets ein Punktdifferenzgebiet aus angebbaren Gebieten und umgekehrt.

77. Ein Punktsummen- oder Punktdifferenzgebiet aus endlichen Gebieten ist selbst endlich.

78. *Das Punktsummengebiet $\mathfrak{C}$ aus zwei Eigebieten $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ ist selbst ein Eigebiet.*

Beweis. Die Zugehörigkeit eines Punktes zu den Gebieten $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$ sei dadurch angedeutet, daß sein Symbol ein $a$, $b$ oder $c$ resp. enthält.

*) Für Ovale in einer Ebene sind auch komplexe $\lambda$ zulässig, vgl. 115.

$$\left.\begin{array}{l}\text{Ein beliebiges } c \text{ gestattet die Darstellung } a+b \\ \text{Ein beliebiges } c' \text{ gestattet die Darstellung } a'+b'\end{array}\right\} \text{(vgl. 73.)}$$

Ein beliebiger Punkt $p$ auf der geraden Strecke $\overline{cc'}$ gestattet die Darstellung

$$p = c + \lambda(c' - c) = a + \lambda(a' - a) + b + \lambda(b' - b)$$
$$(1 \leqq \lambda \leqq 0).$$

Aber bei dieser Begrenzung von $\lambda$ ist

$$\left.\begin{array}{l}a + \lambda(a' - a) \text{ ein Punkt von } \overline{aa'}, \text{ somit ein } a'' \\ b + \lambda(b' - b) \text{ ein Punkt von } \overline{bb'}, \text{ somit ein } b''\end{array}\right\} \text{(vgl. 14)}$$

Also

$$p = a'' + b'' \text{ ist ein } c'' \text{ (vgl. 73).}$$

In Worten: Die gerade Strecke zwischen zwei beliebigen Punkten von $\mathfrak{C}$ gehört ganz zu $\mathfrak{C}$, $\mathfrak{C}$ ist ein Eigebiet, vgl. 14.

79. *Das Punktsummengebiet $\mathfrak{C}$ aus zwei Eigebieten $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ ist ein abgeschlossenes Eigebiet, wenn $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ beides abgeschlossene Eigebiete sind.*

80. *Das Punktsummengebiet $\mathfrak{C}$ aus zwei Eigebieten $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ ist ein randloses Eigebiet, wenn von $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ auch nur eins ein randloses Eigebiet ist.*

81. Statt des ersten Satzes würde man auch ganz allgemein zeigen können:

„Die Punktsummenfigur zweier abgeschlossenen Punktmengen ist selbst eine abgeschlossene Punktmenge."

Wir werden hier einen Beweis des einfacheren Satzes vorführen, der sich ohne weiteres verallgemeinern läßt.

Der Beweis, den wir bringen, ist wohl nicht der einzige und auch nicht der kürzeste mögliche — er findet sein Ende erst mit 89 — er hat aber vielleicht manches Belehrende an sich über seinen eigentlichen Zweck hinaus. Wir behalten die obigen Bezeichnungen bei und folgern aus

$$a = -b + c$$

leicht:

Die Ovalgebiete $\mathfrak{A}$ und $-\mathfrak{B} + c$ haben mindestens einen Punkt gemein, und umgekehrt:

Haben $\mathfrak{A}$ und $-\mathfrak{B} + q$ einen Punkt gemein, so ist $q$ ein Punkt $c$ von $\mathfrak{C}$.*)

*) $a$ und $b$, $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ können natürlich die Rollen tauschen.

Demnach dürfte, wenn ein Grenzpunkt $c$ von zu $\mathfrak{C}$ gehörigen Punkten

$$c_1\, c_2\, c_3 \ldots c_\nu \ldots \qquad \text{in inf.}$$

*nicht* zu $\mathfrak{C}$ gehören sollte, $\mathfrak{A}$ mit $-\mathfrak{B}+c$ keinen Punkt gemein haben; andererseits hat $\mathfrak{A}$ mit den Gebieten

$$-\mathfrak{B}+c_1,\ -\mathfrak{B}+c_2,\ -\mathfrak{B}+c_3, \ldots \qquad \text{in inf.}$$

sicher mindestens je einen Punkt gemein. Wenn wir zeigen, daß jene Folgerung mit dieser Tatsache nicht verträglich ist, so wird erwiesen sein, daß jeder Grenzpunkt von Punkten, die zu $\mathfrak{C}$ gehören, selbst zu $\mathfrak{C}$ gehört und $\mathfrak{C}$ eine abgeschlossene Punktmenge ist. Sie sind nun in der Tat nicht verträglich, sobald der folgende Satz feststeht:

82. *Zwei abgeschlossene Eigebiete $\mathfrak{E}$ und $\mathfrak{F}$, die keinen Punkt gemein haben, haben stets eine (kleinste) Entfernung voneinander, die größer ist als eine angebbare positive von Null verschiedene Größe $\varkappa$.*

Denn aus ihm würde

$$\text{Entf.}\,(\mathfrak{A}, -\mathfrak{B}+c) > \varkappa > 0 \quad \text{oder} \quad \overline{a(-b+c)} > \varkappa > 0$$

folgen; andrerseits könnte man durch geeignete Vergrößerung von $\nu$

$$\overline{c_\nu c} = \overline{(-b+c_\nu)(b+c)} < \varkappa$$

machen und es würde

$$|\overline{a(-b+c_\nu)} - \overline{a(-b+c)}| \leqq \overline{(-b+c_\nu)(-b+c)} < \varkappa,$$

also

$$\overline{a(-b+c_\nu)} > 0 \quad \text{oder Entf.}\,(\mathfrak{A}, -\mathfrak{B}+c_\nu) > 0$$

sein, während doch $\mathfrak{A}$ und $-\mathfrak{B}+c_\nu$ einen Punkt gemein haben müssen. Unlösbarer Widerspruch.

83. Es handelt sich also nur um den (bis 90 exkl. sich erstreckenden) Beweis des Satzes 82, der ein besonderer Fall des allgemeineren Satzes ist:

Zwei abgeschlossene Punktmengen, die keinen Punkt gemeinsam haben, haben stets eine Entfernung voneinander, die größer ist als eine angebbare positive von Null verschiedene Größe $\varkappa$.

Dieser Satz ist aller Wahrscheinlichkeit nach schon ganz allgemein bewiesen. Da ich dessen aber nicht sicher bin, so will ich hier für den engern Satz einen ausführlichen Beweis geben, der ohne weiteres auch dem

allgemeineren Satze gerecht wird, wenn man nur an Stelle der Eigebiete $\mathfrak{E}$ und $\mathfrak{F}$ ganz beliebige abgeschlossene Punktgebiete $\mathfrak{P}$ und $\mathfrak{Q}$ setzt.

84. Zunächst zeigen wir:

*Ein abgeschlossenes Eigebiet $\mathfrak{E}$ hat von einem abgeschlossenen Äquiradialgebiet $\mathfrak{K}_r$, das einen Raum, in dem $\mathfrak{E}$ liegt, aufspannt und keinen Punkt mit $\mathfrak{E}$ gemein hat, eine Entfernung, die größer ist, als eine angebbare positive von Null verschiedene Größe $x$.* (Beweis reicht bis 89 exkl.)

Von $\mathfrak{K}_r$ sei $r$ der Radius, $j$ der Mittelpunkt. Der Punkt $j$ sei als Koordinatenzentrum und als Zentrum einer Schar konzentrischer abgeschlossener Äquiradialgebiete $\mathfrak{K}_{r+\lambda}$, der variabele Faktor $\lambda$ sei in dem Intervall

$$0 \leqq \lambda \leqq \lambda',$$

und $\lambda'$ sei so gewählt, daß das Gebiet $\mathfrak{K}_{r+\lambda'}$ sicher einen Punkt mit $\mathfrak{E}$ gemein hat, was immer möglich ist.

Hat $\mathfrak{K}_{r+\lambda}$ einen Punkt mit $\mathfrak{E}$ gemein, so hat ersichtlich auch

$$\mathfrak{K}_{r+\lambda_1} \qquad (\lambda_1 > \lambda)$$

einen Punkt mit $\mathfrak{E}$ gemein. Daraus läßt sich schließen, daß diejenigen $\lambda$-Werte unseres Intervalles von 0 bis $\lambda'$, für welche $\mathfrak{K}_{r+\lambda}$ und $\mathfrak{E}$ Punkte gemein haben, *ein* zusammenhängendes Intervall erfüllen. Es muß daher einen und zwar einen einzigen Wert $\bar{\lambda}$ geben, so daß

$$\text{für} \begin{Bmatrix} 0 \leqq \lambda < \bar{\lambda} \\ \bar{\lambda} < \lambda \leqq \lambda' \end{Bmatrix} \mathfrak{E} \text{ und } \mathfrak{K}_{r+\lambda} \begin{Bmatrix} \text{keinen Punkt} \\ \text{mindestens einen Punkt} \end{Bmatrix} \text{gemein haben,}$$

wobei nur noch fraglich ist, was für $\bar{\lambda}$ selbst eintritt.

85. Wir zeigen, daß die Annahme, $\mathfrak{K}_{r+\bar{\lambda}}$ habe *keinen* Punkt mit $\mathfrak{E}$ gemein, auf einen Widerspruch führt, $\mathfrak{K}_{r+\bar{\lambda}}$ also mit $\mathfrak{E}$ einen Punkt gemein haben muß. (Beweis reicht bis 88 exkl.)

Es läßt sich nämlich stets ein von $j$ ausgehender, in einem Punkte $s$ der Begrenzung von $\mathfrak{K}_{r+\bar{\lambda}}$ endender Radiusvektor $S$ ausfindig machen, der nicht um die kleinste endliche Strecke über $s$ hinaus verlängert werden darf, ohne einen Punkt mit $\mathfrak{E}$ gemein zu haben, woraus alles Gewünschte folgt. Denn verlängern wir zum Beispiel dieses $S$ nach und nach um die Strecken

$$\frac{\sigma}{2}, \frac{\sigma}{4}, \frac{\sigma}{8}, \frac{\sigma}{16} \cdots \frac{\sigma}{2^n} \cdots \text{ in inf.,} \qquad (\sigma > 0)$$

so können wir auf jeder dieser Verlängerungsstrecken einen Punkt

$$s_1, s_2, s_3, s_4 \dots s_n \dots \text{ in inf.}$$

wählen, der zu $\mathfrak{C}$ gehört. Die $s_n$ nähern sich nun mit unaufhörlich wachsendem $n$ offenbar dem Punkt $s$ als ihrer Grenze; $\mathfrak{C}$ ist aber eine abgeschlossene Punktmenge, enthält also $s$; $s$ gehört aber als Begrenzungspunkt auch zu dem abgeschlossenen $\mathfrak{K}_{r+\bar{\lambda}}$; also haben $\mathfrak{K}_{r+\bar{\lambda}}$ und $\mathfrak{C}$ den Punkt $s$ gemein, entgegen der Annahme, von der wir ausgingen, welche dadurch unhaltbar wird.

86. Es erübrigt also nur noch der Nachweis des Radiusvektors $S$, der zunächst für den Fall, daß $\mathfrak{K}_{r+\bar{\lambda}}$ ein Kreis ist, geführt werden soll. Die durch $j$ gehenden Koordinatenachsen zerschneiden $\mathfrak{K}_{r+\bar{\lambda}}$ in vier Sektoren; wir suchen diejenigen heraus, welche einen Radiusvektor enthalten, der um $\frac{\sigma}{4}$ verlängert, einen Punkt mit $\mathfrak{C}$ gemein hat und nennen sie $T_{(2)}$; die $T_{(2)}$ zerlegen wir durch Winkelhalbierung in doppelt so viel Sektoren und suchen diejenigen, $T_{(3)}$, aus ihnen heraus, welche einen Radiusvektor enthalten, der um $\frac{\sigma}{8}$ verlängert einen Punkt mit $\mathfrak{C}$ gemein hat usw.; durch fortgesetztes Halbieren und Aussuchen kommen wir zu Sektoren $T_{(n)}$ mit beliebig großem $n$, in denen Radienvektoren sich finden, welchen um $\frac{\sigma}{2^n}$ verlängert, Punkte mit $\mathfrak{C}$ gemein haben. Es ist sicher, daß es mindestens ein $T_{(n)}$ von jeder endlichen Stufe $n$ gibt; denn gäbe es kein $T_{(n)}$, so würde kein einziger Radiusvektor, wenn man ihn um $\frac{\sigma}{2^n}$ verlängert, einen Punkt mit $\mathfrak{C}$ gemein haben; dann würde offenbar auch der Kreis $\mathfrak{K}_{r+\lambda_2}$ für

$$\lambda_2 = \bar{\lambda} + \frac{\sigma}{2_n} > \bar{\lambda}$$

keinen Punkt mit $\mathfrak{C}$ gemein haben, entgegen der feststehenden Tatsache, daß $\mathfrak{K}_{r+\lambda}$ für $\lambda > \bar{\lambda}$ stets Punkte mit $\mathfrak{C}$ gemein hat (vgl. oben). Wenn es aber ein $T_{(n)}$ von beliebig hoher Stufe gibt, und jedes $T_{(n)}$ ein Teil eines vorher bestimmten $T_{(n-1)}$ ist, so gibt es mindestens einen Strahl $S$ aus $j$, dem sich eine Reihe von Sektoren $T_{(n)}$ als Grenze annähert, und der um keine endliche Strecke verlängert werden kann, ohne einen Punkt mit $\mathfrak{C}$ gemein zu haben.

87. Ist $\mathfrak{K}_{r+\bar{\lambda}}$ dreidimensional, eine Kugel, so sind zur Auffindung von $S$ zwei Winkelteilungen hintereinander auszuführen: Eine erste mittels Ebenen bezw. Halbebenen, die von einer durch $j$ gelegten Achse ausgehen — sie

führt zur Auffindung mindestens einer Halbebene $\mathfrak{H}$, in der mindestens ein $S$ sich befindet — und eine zweite mittels Strahlen in $\mathfrak{H}$, die von $j$ ausgehen — diese führt zur Auffindung mindestens eines Strahles $S$ selbst.

Auch auf Äquiradiale von $n$-Dimensionen überhaupt ist der Beweis übertragbar, man hat nur dann zur Bestimmung von $S$ nacheinander $n-1$ Winkelteilungen auszuführen.

88. Unser Ergebnis: $\mathfrak{K}_{r+\bar{\lambda}}$ hat einen Punkt mit $\mathfrak{E}$ gemein, läßt nun erkennen: Wenn $\mathfrak{K}_r$ mit $\mathfrak{E}$ keinen Punkt gemein hat, kann $\bar{\lambda}$ nicht gleich 0 werden, es muß vielmehr

$$\lambda > 0$$

sein, und es gibt einen Wert $\lambda_1$, für den

$$\bar{\lambda} > \lambda_1 > 0$$

ist, und das Äquiradial $\mathfrak{K}_{r+\lambda_1}$ die Figur $\mathfrak{K}_r$ ein-, die Figur $\mathfrak{K}_{r+\bar{\lambda}}$ ausschließt. Dabei ist natürlich

$$\text{Entf.}\,(\mathfrak{K}_r, \mathfrak{K}_{r+\lambda_1}) = \lambda_1 > 0,$$

folglich

$$\text{Entf.}\,(\mathfrak{K}_r, \mathfrak{E}) > \lambda_1 > 0.$$

89. Hiermit ist der Satz 84 völlig, also auch der Satz 82 *in einer gewissen Einschränkung*, und dadurch auch der Satz 79 *mit der Einschränkung* bewiesen, daß unter $\mathfrak{B}$ im Besonderen ein abgeschlossenes Äquiradialgebiet verstanden wird, das einen Raum aufspannt, in dem $\mathfrak{A}$ enthalten ist. Man überzeugt sich hiervon durch nochmaliges Durchgehen der unter 81 und 82 gemachten Schlüsse.

Dieser *eingeschränkte* Satz 79 kann nun aber wieder zum Beweise des *uneingeschränkten* Satzes 82 verwendet werden, aus welchem seinerseits, wie oben nachgewiesen worden ist, der *uneingeschränkte* Satz 79 folgt.

Der Beweis von Satz 82 kann nämlich jetzt in engster Analogie zu dem von Satz 84 geführt werden; es tritt nur an Stelle von $\mathfrak{K}_r$ jetzt $\mathfrak{F}$, und an Stelle der konzentrischen Äquiradialgebiete $\mathfrak{K}_{r+\lambda}$ die Schar der Punktsummengebiete

$$\mathfrak{F} \dotplus \mathfrak{K}_\varrho, \qquad (0 \leqq \varrho \leqq \varrho')$$

wobei die $\mathfrak{K}_\varrho$ eine Schar konzentrischer Äquiradialgebiete um den Nullpunkt

bilden, die den nämlichen Raum aufspannen wie $\mathfrak{E}$ und $\mathfrak{F}$ beide zusammen, und $\varrho$ den jeweiligen Radius, $\mathfrak{K}_0$ also den Nullpunkt selbst darstellt.

Nirgends ergibt sich bei der Übertragung eine Schwierigkeit, denn es ist leicht zu zeigen, daß für

$$\varrho_1 > \varrho_2$$

$$\mathfrak{F} \dotplus \mathfrak{K}_{\varrho_2} \text{ innerhalb } \mathfrak{F} \dotplus \mathfrak{K}_{\varrho_1}$$

liegt, und die Abgeschlossenheit der „parallel" begrenzten Eigebiete

$$\mathfrak{F} \dotplus \mathfrak{K}_\varrho$$

steht ja ebenfalls schon fest.

Damit sind endlich die Sätze 82 und 79 vollständig bewiesen.

90. Satz 80 ist einfach zu erledigen: Ist $\mathfrak{A}$ randlos, so sind alle Punkte $a$ innere Punkte von $\mathfrak{A}$; dann ist aber leicht erweislich auch $c = a + b$, ob nun $b$ ein innerer Punkt von $\mathfrak{B}$ ist oder nicht, stets ein innerer Punkt von $\mathfrak{C}$; es gibt keine Randpunkte von $\mathfrak{C}$.

Der Beweis gilt offenbar nicht nur für Eigebiete, sondern für beliebige Figuren $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, von denen die eine randlos ist.

Auf Sätze, die von Eigebieten mit unvollständigem Rand handeln, gehen wir hier nicht ein, vgl. 15.

Satz 78 enthält nach Bemerkung 76 auch den folgenden:

91. *Das Punktdifferenzgebiet* $\mathfrak{C}$ *aus zwei Eigebieten* $\mathfrak{A}$ *und* $\mathfrak{B}$ *ist selbst ein Eigebiet.*

92. Auch verallgemeinert man 78 mit Hilfe von 112 leicht zu dem weiteren Satze:

*Sind die* $\mathfrak{A}_1, \mathfrak{A}_2, \mathfrak{A}_3, \dots \mathfrak{A}_n$ *Eigebiete, so ist auch*

$$\alpha_1 \mathfrak{A}_1 + \alpha_2 \mathfrak{A}_2 + \alpha_3 \mathfrak{A}_3 \dots + \alpha_n \mathfrak{A}_n, \tag{43.}$$

*wo die* $\alpha_1, \alpha_2 \dots \alpha_n$ *beliebige endliche reelle Faktoren (Transformatoren) sind, ein Eigebiet.**)

Man bemerke die Allgemeinheit unserer Sätze. $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$, bezw. $\mathfrak{A}_1, \mathfrak{A}_2, \dots \mathfrak{A}_n$ brauchen nicht der nämlichen Mannigfaltigkeitsstufe anzugehören, und, wenn sie es tun, nicht den nämlichen Raum aufzuspannen.

---

*) Vergl. zu 78, 91, 92 in des Verfassers „Ov. u. Eifl." S. 27, Satz 18 und die analytischen, nach mehreren Richtungen verallgemeinerten Fassungen bei Herrn *Minkowski*, Math. Ann. 57. Bd., S. 456 u. ff., als einigermaßen verwandte, aber von den Stützlinearen ausgehende, auf positive Parameterintervalle beschränkte Sätze.

**93. Mit Hilfe von 115 erhält man auch noch:**

*Sind die* $\mathfrak{A}_1, \mathfrak{A}_2, \mathfrak{A}_3 \ldots \mathfrak{A}_n$ *Ovalgebiete einer Ebene, so ist* (43.) *ein Ovalgebiet derselben Ebene, wenn man den* $\alpha_1, \alpha_2 \ldots \alpha_n$ *beliebige reelle oder komplexe Werte der Form* $a + bi$ *erteilt.*

94. Hilfsbetrachtungen*) (94—107 inkl.). Im Raum der Punkte, welche den Werten der komplexen willkürlich veränderlichen Zahl

$$(44.) \qquad x_1 i_1 + x_2 i_2 + \cdots + x_n i_n$$

(die $x$ reell; die $i$ voneinander unabhängige Einheiten) entsprechen, wird durch eine lineare Gleichung

$$(45.) \qquad k_1 x_1 + k_2 x_2 + \cdots + k_n x_n = k_0$$

ein von mir so genanntes „Hauptlinear" bestimmt, wenn man sämtliche $k$ konstant, eine Schar „paralleler" Hauptlineare, wenn man unter den $k$ allein $k_0$ variabel nimmt.

95. Damit auch umgekehrt einem gegebenen Hauptlinear eine völlig bestimmte Gleichung entspreche, wollen wir den zunächst nur bis auf einen willkürlichen gemeinsamen Faktor bestimmten Koeffizienten $k$ die Bedingung

$$(46.) \qquad k_1^2 + k_2^2 + k_3^2 + \cdots + k_n^2 = 1$$

auferlegen und noch irgend eine weitere,**) welche auch das Vorzeichen von $k_0$ noch bestimmt. Dann kann man $k_0$ als die nach einem bestimmten Gesichtspunkt mit Vorzeichen versehene „Entfernung" unseres Linears vom Nullpunkt bezeichnen.

96. Jedem Raumpunkt ist also *ein* Wert des Parameters $k_0$ zugeordnet, sobald die übrigen $k$ bestimmte Werte haben. Man findet ihn durch Einsetzung der „Koordinaten" $x$ des Punktes in die Gleichung (45.)

---

*) Ähnliche Betrachtungen führt Herr *Minkowski* in der eben zitierten Arbeit mit Hilfe seiner „Stützebenenfunktion" durch, deren Einführung vielleicht auch im vorliegenden Kapitel stellenweise Vorteil bieten möchte. Ich lasse indes die Fassung lieber so, wie ich sie vor Bekanntwerden des *Minkowski*schen Aufsatzes fertiggestellt hatte.

**) Etwa die, daß $k_0$ das nämliche Vorzeichen haben soll, wie der vom Hauptlinear auf einer bestimmten Axe erzeugte Abschnitt, z. B. wie der Abschnitt auf der Achse $X_1$. In diesem Falle müßte eine vorgelegte Gleichung

$$k'_1 x_1 + k'_2 x_2 + \cdots + k'_n x_n = k'_0$$

noch mit $\operatorname{sgn}(k'_1)$ multipliziert werden, um sie sicher auf die Normalform (45.) zu bringen.

97. Ein Eigebilde $\mathfrak{A}$ unseres Raumes wird von den Hauptlinearen einer bestimmten Schar getroffen, so lange $k_0$ sich in einem gewissen Intervall

$$\alpha' \leqq k_0 \leqq \alpha''$$

hält, eine andere $\mathfrak{B}$, so lange

$$\beta' \leqq k_0 \leqq \beta''.$$

Den besonderen Werten $k_0 = \alpha'$, $k_0 = \alpha''$ entsprechen die Stützlineare von $\mathfrak{A}$,
den besonderen Werten $k_0 = \beta'$, $k_0 = \beta''$ entsprechen die Stützlineare von $\mathfrak{B}$,

welche der Schar angehören, und zwar nennen wir

die zu $\alpha'$ und $\beta'$ gehörigen Stützlineare nach der negativen Seite liegend,
die zu $\alpha''$ und $\beta''$ gehörigen Stützlineare nach der positiven Seite liegend.

98. Dadurch werden auch die Ausdrücke verständlich: Zwei parallele Stützlineare $A$, $B$ zweier Eigebilde $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$ resp. liegen nach der nämlichen, liegen nach verschiedenen Seiten. Wir können auf Grund unserer Hilfsbetrachtungen nun folgende Sätze aufstellen:

99. *Gehört zu einem Punkte* $a$ *von* $\mathfrak{A}$ *der Parameterwert* $k_0 = \alpha$
*und zu einem Punkte* $b$ *von* $\mathfrak{B}$ *der Parameterwert* $k_0 = \beta$,
*so gehört zum Punkte* $c = a + b$ *von* $\mathfrak{C}$ *der Parameterwert* $k_0 = \alpha + \beta$.

100. Denn — unter Einführung leichtverständlicher Bezeichnungen — aus

$$(47.) \qquad \sum_1^n{}_i\, k_i x_i^{(a)} = \alpha \quad \text{und} \quad \sum_1^n{}_i\, k_i x_i^{(b)} = \beta$$

folgt

$$(48.) \qquad \Sigma k_i (x_i^{(a)} + x_i^{(b)}) \equiv \Sigma k_i x_i^{(c)} = \alpha + \beta.$$

101. Ferner gilt Da

$$\alpha' \leqq \alpha \leqq \alpha'' \quad \text{und} \quad \beta' \leqq \beta \leqq \beta'',$$

so ist

$$\alpha' + \beta' \leqq \alpha + \beta \leqq \alpha'' + \beta''$$

und zwar ist

nur dann $\alpha' + \beta' = \alpha + \beta$, wenn $\alpha' = \alpha$, $\beta' = \beta$,
nur dann $\alpha'' + \beta'' = \alpha + \beta$, wenn $\alpha'' = \alpha$, $\beta'' = \beta$,

in Worten:

102. *Für Punkte von* $\mathfrak{C}$ *ist* $\alpha' + \beta'$ *der kleinste,* $\alpha'' + \beta''$ *der größte* $k_0$*-Wert, jener dem nach der negativen, dieser dem nach der positiven Seite liegenden Stützlinear von* $\mathfrak{C}$ *in unserer Schar entsprechend, und:*

103. *Ein Punkt c auf einem Stützlinear C von* $\mathfrak{C}$ *entsteht und entsteht nur durch Addition von Punkten a und b, die auf parallelen nach gleicher Seite wie C liegenden Stützlinearen A und B von* $\mathfrak{A}$ *und* $\mathfrak{B}$ *liegen.*

104. Wenn man nun in Anschlag bringt, daß jeder Begrenzungspunkt eines Eigebietes auf (mindestens) einem Stützlinear liegt, und umgekehrt jeder Eigebietspunkt auf einem Stützlinear zur Begrenzung des Eigebietes gehört (vgl. 22), so entsteht aus 103 der allgemeinere Satz, um den es uns im folgenden zu tun ist:

105. *Durch Addition eines Punktes a von* $\mathfrak{A}$ *und eines Punktes b von* $\mathfrak{B}$ *entsteht dann und nur dann ein Punkt c der Begrenzung von* $\mathfrak{C} \equiv \mathfrak{A} \dotplus \mathfrak{B}$, *wenn a und b selbst auf der Begrenzung von* $\mathfrak{A}$ *und* $\mathfrak{B}$ *resp., und zwar auf parallelen, nach der gleichen Seite liegenden Stützlinearen A und B von* $\mathfrak{A}$ *und* $\mathfrak{B}$ *resp. liegen; c liegt dann auf einem Stützlinear C von* $\mathfrak{C}$, *das parallel zu A und B ist und nach der nämlichen Seite liegt.*

Hieraus folgt:

106. *Durch Subtraktion eines Punktes b des vollen Eigebildes* $\mathfrak{B}$ *von einem Punkte a des vollen Eigebildes* $\mathfrak{A}$ *entsteht dann und nur dann ein Punkt c der Begrenzung von* $\mathfrak{C} \equiv \mathfrak{A} \dot{-} \mathfrak{B}$, *wenn a und b selbst auf der Begrenzung von* $\mathfrak{A}$ *und* $\mathfrak{B}$ *resp. und zwar auf parallelen, nach verschiedenen Seiten liegenden Stützlinearen A und B' von* $\mathfrak{A}$ *und* $\mathfrak{B}$ *resp. liegen; c liegt dann auf einem Stützlinear C von* $\mathfrak{C}$, *das parallel zu A und B' und nach der nämlichen Seite wie A liegt —*

vermittels (41.) und des leicht zu beweisenden Satzes:

107. *Wenn B ein Stützlinear von* $\mathfrak{B}$, *ist* $(-B)$ *ein paralleles Stützlinear von* $(-\mathfrak{B})$, *doch liegt es nach der andern Seite.*

108. Von hier ab beschränken wir uns auf Gebiete von zwei Dimensionen, also auf Zahlen $a + bi$ und Ovale.

Wir behandeln die Frage: Unter welchen Umständen ist

$$\alpha\mathfrak{E} \dotplus \beta\mathfrak{E} \equiv (\alpha + \beta)\mathfrak{E} \tag{49.}$$

für endliche von Null verschiedene Ähnlichkeitstransformatoren $\alpha$, $\beta$?

Wir setzen

$$\alpha\mathfrak{E} \equiv \mathfrak{F}, \quad \beta\mathfrak{E} \equiv \frac{\beta}{\alpha}\mathfrak{F}, \quad \frac{\beta}{\alpha} \equiv \mu, \tag{50.}$$

worauf unsere Frage die Form annimmt:

Wann ist für endliches, von Null verschiedenes $\mu$

(51.) $$\mathfrak{F} \dotplus \mu\mathfrak{F} \equiv (1+\mu)\mathfrak{F}?$$

Es scheint am bequemsten, bei der Untersuchung die Stützgeraden ins Auge zu fassen unter Benutzung des selbstverständlichen Satzes:

109. *Für zwei identische Ovale müssen die nach ein und derselben Seite gelegenen Stützgeraden einer beliebigen festen Richtung zusammenfallen,* und des umgekehrten:

110. *Wenn für jede beliebige Richtung* $\varrho$ *die nach der nämlichen Seite gelegenen Stützgeraden zweier Ovale zusammenfallen, so sind die Ovale identisch,*

der auch einleuchtend ist, und den wir als bekannt bei 24 vorausgesetzt haben.

111. $\mu$ sei reell und positiv.

Die Parameter der beiden Stützgeraden einer Richtung $\varrho$ sind dann, jedesmal nach steigender Größe geordnet:

| | | |
|---|---|---|
| | für $\mathfrak{F}$ | $\alpha'$, $\alpha''$ |
| | für $\mu\mathfrak{F}$ | $\mu\alpha'$, $\mu\alpha''$ |
| (52.) | für $\mathfrak{F} \dotplus \mu\mathfrak{F}$ (vgl. 102) | $(1+\mu)\alpha'$, $(1+\mu)\alpha''$ |
| (53.) | für $(1+\mu)\mathfrak{F}$ | $(1+\mu)\alpha'$, $(1+\mu)\alpha''$. |

Nach (52.) und (53.) liegt für $\mathfrak{F} \dotplus \mu\mathfrak{F}$ und $(1+\mu)\mathfrak{F}$ Übereinstimmung der entsprechenden Stützgeraden in jeder Richtung vor.

*Für positives* $\mu$ *haben also die Identitäten* (51.) *und* (49.) *statt bei beliebiger Gestaltung der Ovale* $\mathfrak{F}$ *und* $\mathfrak{E}$.

112. Für das Folgende ist zu beachten: Unter Transformation einer Figur $F$ mit einem negativen Faktor $\mu$ ist natürlich die Transformation ihrer sämtlichen Punkte mit $\mu$ zu verstehen, was bei einer ebenen Figur auf dasselbe hinauskommt, wie wenn man die Figur $F$ mit dem positiven Faktor $-\mu$ transformiert und sie dann eine halbe Drehung um den Nullpunkt ausführen läßt.

113. $\mu$ sei reell und negativ und gleich $-\nu$ gesetzt.

Dann sind die Parameter der beiden Stützgeraden einer Richtung $\varrho$, jedesmal nach steigender Größe geordnet:

| | | |
|---|---|---|
| | für $\mathfrak{F}$ | $\alpha',\ \alpha''$ |
| | für $-\nu\mathfrak{F}$ | $-\nu\alpha'',\quad -\nu\alpha'$ |
| (54.) | für $\mathfrak{F} \dotplus -\nu\mathfrak{F}$ (vgl. 102) | $\alpha'-\nu\alpha'',\ \alpha''-\nu\alpha'$ |
| (55.) | für $(1-\nu)\mathfrak{F}$, wenn $1-\nu>0$ | $(1-\nu)\alpha',\ (1-\nu)\alpha''$ |
| (56.) | für $(1-\nu)\mathfrak{F}$, wenn $1-\nu<0$ | $(1-\nu)\alpha'',(1-\nu)\alpha'$ |
| (57.) | für $(1-\nu)\mathfrak{F}$, wenn $1-\nu=0$ | $0,\ 0.$ |

Als Bedingung für die Übereinstimmung der Parameterwerte von (54.) sowohl mit denen von (55.) als von (56.) als von (57.) ergibt sich jedesmal

(58.) $$\alpha'=\alpha''.$$

Da dies für jede Richtung $\varrho$ gilt, so muß für $\mathfrak{F}$ jede Stützgerade mit der zu ihr parallelen zusammenfallen. Daraus läßt sich leicht schließen:

*Für negatives* $\mu$ *finden die Identitäten* (51.) *und* (49.) *dann und nur dann statt, wenn* $\mathfrak{F}$ — *und mit ihm* $\mathfrak{E}$, $\mu\mathfrak{F}$, $(1+\mu)\mathfrak{F}$, $1 \dotplus \mu\mathfrak{F}$ — *sich auf einen Punkt reduziert.*

114. Wir können uns nicht versagen, die Frage bei (51.) auch noch für komplexes $\mu$ zu beantworten, obwohl dies für den Hauptzweck der Arbeit nicht nötig ist.

Es sei also

$$\mu=a+bi,\quad b\gtrless 0,$$

und es sei untersucht, ob die beiden Ovale

$$\mathfrak{A}_1\equiv\mathfrak{F}\dotplus(a+bi)\mathfrak{F},\quad \mathfrak{A}_2\equiv(1+a+bi)\mathfrak{F}$$

identisch sein können.

115. Wenn

$$a+bi=\varrho(\cos\varphi+i\sin\varphi),\ \text{also}\ \varrho=\sqrt{a^2+b^2},$$
$$1+a+bi=r(\cos\psi+i\sin\psi),\ \text{also}\ r=\sqrt{(1+a)^2+b^2},$$

so entspricht die Multiplikation mit dem Faktor $a+bi$, bezw. $1+a+bi$ in geometrischer Deutung bekanntlich einer Ähnlichkeitstransformation mit dem reellen positiven Faktor $\varrho$, bezw. $r$ und einer hinzukommenden Drehung um den Nullpunkt vom Betrage $\varphi$, bezw. $\psi$.

116. Es sei zuerst

$$b > 0, \text{ somit } \sin\varphi > 0, \ 0 < \varphi < \pi.$$

Leicht erweislich ist dann

$$\psi < \varphi. \tag{59.}$$

117. Es sei zunächst gefragt, wann die zur reellen Achse $X$ parallelen, nach Seite der positiven imaginären Halbachse $Y$ liegenden Stützgeraden $S_1$ und $S_2$ von $\mathfrak{A}_1$, bezw. $\mathfrak{A}_2$ zusammenfallen. Für ihre Lagenbestimmung kommen die folgenden drei Stützgeraden von $\mathfrak{F}$ in Betracht:

$S_0$, parallel $X$, nach Seite des positiven $Y$ gelegen, mit der Ordinate $y_0 = \vartheta$;

$T$, mit der positiven $X$-Halbachse den Winkel $-\varphi$ einschließend, im Abstande $\eta$ vom Nullpunkt gelegen und eine Abszisse $x_0 = t$ abschneidend. Für $t$ gilt

$$t > t', \tag{60.}$$

wenn $t'$ die Abszisse ist, welche von der zu $T$ parallelen Stützgeraden $T'$ abgeschnitten wird, weil $T$ nach Drehung der Figur um einen Winkel $\varphi$ die nach Seite des *positiven* $Y$ liegende Stützgerade parallel zu $X$ werden soll.

$U$, mit der positiven $X$-Halbachse den Winkel $-\psi$ einschließend, im Abstande $\zeta$ vom Nullpunkt gelegen, und eine Abszisse $x_0 = u$ abschneidend. Für $u$ gilt

$$u > u', \tag{61.}$$

wenn $u'$ die Abszisse ist, welche von der zu $U$ parallelen Stützgeraden $U'$ abgeschnitten wird, weil $U$ nach Drehung der Figur um einen Winkel $\psi$ die nach Seite des *positiven* $Y$ liegende Stützgerade parallel zu $X$ werden soll. Damit nach dieser Drehung die Ordinate $y_0$ der Geraden direkt gleich dem gegebenen $\zeta$ gesetzt werden könne, muß $\zeta$ das Vorzeichen von $u$ erhalten.*)

118. Nach diesen — in bezug auf die Vorzeichen notwendigerweise sorgfältig gehaltenen — Vorbereitungen ergibt sich:

---

*) Damit $\eta$ und $\zeta$, in der oben gewünschten Weise mit Vorzeichen versehen, sicher als die Werte des Parameters $k_0$ in der Gleichung $k_1 x + k_2 y = k_0$ von $T$ bezw. $U$ auftreten, hat man diese Gleichungsform aus der jeweils gegebenen Gleichung $k'_1 x + k'_2 y = k'_0$ durch Multiplikation mit $\operatorname{sgn}(k'_1)$ herzuleiten, vergl. 95. Anmerkung.

Die Ordinate von $S_1$ als Summe der Ordinaten von $S_0$ und $(a+bi)T$ zu

(62.) $$y_1 = \vartheta + \varrho\eta,$$

die Ordinate von $S_2$ als Ordinate von $(1+a+bi)U$ zu

(63.) $$y_2 = \zeta r.$$

Wir werden nun zeigen, daß

(64.) $$y_2 = \zeta r \leqq \vartheta + \varrho\eta = y_1$$

ist. Man hat als Gleichung
für $S$:

(65) $$y - \vartheta = 0,$$

für $T$:

(66.) $$x \cdot \sin\varphi + y\cos\varphi - \eta = 0,^{*)}$$

für $U$:

(67.) $$x \cdot \sin\psi + y\cos\psi - \zeta = 0.$$

Die Gerade $V$, gegeben durch

(68.) $$x\sin\varphi + y\cos\varphi - \eta + \frac{1}{\varrho}(y - \vartheta) = 0$$

geht offenbar durch den Schnitt $s$ von $S$ und $T$ und die Umformungen

(69.) $$\begin{cases} x \cdot \sin\varphi + y\left(\cos\varphi + \frac{1}{\varrho}\right) - \left(\eta + \frac{\vartheta}{\varrho}\right) = 0 \\ bx + (a+1)y - (\eta\varrho + \vartheta) = 0 \\ x\sin\psi + y\cos\psi - \frac{\eta\varrho + \vartheta}{r} = 0 \end{cases}$$

zeigen, daß $V$ parallel zu $U$ ist, die Entfernung

(70.) $$w = \frac{\eta\varrho + \vartheta}{r}$$

vom Nullpunkt hat und eine Abzisse abschneidet, deren Vorzeichen gleich dem Vorzeichen dieser Entfernung $w$ ist.

Die Gerade $U$ hat vom Nullpunkt die Entfernung

(71.) $$\zeta = x\sin\psi + y\cos\psi.$$

---

*) Da $\sin\varphi$, $\sin\psi > 0$, hat man in (66.) und (67.) schon die in 117, Anm. geforderten Normalformen vor sich.

Für $x, y$ darf man die Koordinaten eines beliebigen Punktes von $U$, also auch die Koordinaten $\bar{x}$, $\bar{y}$ eines Berührpunktes von $U$ und $\mathfrak{F}$ einsetzen:

(72.) $$\zeta = \bar{x} \sin \psi + \bar{y} \cos \psi.$$

Aus der Stützgeradennatur von $S$ und $T$ und den über die Vorzeichen getroffenen Annahmen folgen aber für die Koordinaten jedes $\mathfrak{F}$-Punktes, also auch für $\bar{x}$ und $\bar{y}$ die Ungleichungen:

(73.) $$\bar{y} \leqq \vartheta,$$

(74.) $$\bar{x} + \bar{y} \operatorname{ctg} \varphi \leqq t.$$

Die letzte nimmt wegen

$$\sin \varphi > 0 \qquad \text{und} \qquad t \sin \varphi = \eta$$

auch die Formen

(75.) $$\bar{x} \sin \varphi + \bar{y} \cos \varphi \leqq \eta,$$

(76.) $$b\bar{x} + a\bar{y} \leqq \eta\varrho$$

an. Die Addition von (73.) und (76.) ergibt

(77.) $$b\bar{x} + (a+1)\bar{y} \leqq \eta\varrho + \vartheta$$

(78.) $$\bar{x} \sin \psi + \bar{y} \cos \psi \leqq \frac{\eta\varrho + \vartheta}{r}$$

oder, mittels (72.) und (70.)

(79.) $$\zeta \leqq w,$$

woraus

$$r\zeta \leqq rw$$

oder

(80.) $$y_2 \leqq y_1$$

folgt. Das Gleichheitszeichen gilt nur, wenn sowohl

(81.) $$\bar{y} = \vartheta$$

als

(82.) $$\bar{x} + \bar{y} \operatorname{ctg} \varphi = t$$

ist, mit andern Worten:

119. *Die bei* 117 *in Frage gestellte Koinzidenz von $S_1$ und $S_2$ findet nur statt, wenn s selbst der Berührpunkt von $U$ und somit ein Punkt des Ovalgebietes $\mathfrak{F}$ und seiner Begrenzung $F$ ist.*

120. Das Ergebnis überträgt sich durch eine Koordinatentransformation, welche die Halbachse $+Y$ in $-Y$ überführt, sofort auf den Fall

$$b<0, \quad \sin\varphi<0, \quad 0>\varphi>-\pi,$$

und durch eine Drehung des Koordinatensystems auf beliebige zwei Stützgerade $S$ und $T$ von $\mathfrak{F}$, die einen „leeren" (d. h. samt seinem Scheitelwinkel vom Oval freien), den Grenzangaben

$$-\pi<\varphi<\pi, \quad \varphi \neq 0$$

sich fügenden Winkel $\varphi$ einschließen.

121. Man bestimme nun drei — im übrigen beliebige — Stützgeraden $T, S, R$ so, daß die leeren Winkel

$$\sphericalangle TS = \sphericalangle SR = \varphi$$

werden, und bezeichne die Schnitte $(TS)$, $(SR)$ bezw. mit $s$, $r$, vgl. Fig. 5.

122. Daß $S$, ebenso $R$, nach willkürlicher Wahl von $T$ immer vorhanden und eindeutig bestimmt ist, läßt sich leicht zeigen: Zunächst ist, da $\varphi$ bestimmtes Vorzeichen hat, die Richtung von $S$ eindeutig gegeben; von dieser Richtung gibt es i. a. zwei Stützgerade $S, S'$ an $\mathfrak{F}$ (vgl. 19), welche $\mathfrak{F}$ zwischen sich einschließen; von den zwei „korrespondierenden" Winkeln $\varphi$ aber, welche $S$ und $S'$ mit $T$ auf Seite von $\mathfrak{F}$ bilden, liegt notwendig der eine und nur der eine, $S$, außerhalb des von $S$ und $S'$ gebildeten Ebenenstreifens und außerhalb $\mathfrak{F}$; sein Scheitelwinkel, als auf der andern Seite von $T$ liegend, enthält auch keinen Punkt von $\mathfrak{F}$ im Innern, $S$ entspricht also unsern Wünschen. Sobald $S'$ mit $S$ zusammenfällt, fällt auch $\mathfrak{F}$ ganz in $S$ hinein und $S$ entspricht ebenfalls.

123. Die Halbiergeraden beider Winkel $\varphi$ müssen sich in einem Punkte $m$ schneiden, der offenbar nicht auf derselben Seite der Stützgeraden $S$ liegt, wie $\mathfrak{F}$, und also kein Punkt von $\mathfrak{F}$ sein kann. Diese Halbiergeraden sind aber selbst Stützgerade von $\mathfrak{F}$, in $s$ und $r$ bezw. und bilden miteinander den leeren Winkel $\varphi$, nach 119 und 120 müßte also $m$ ein Punkt von $\mathfrak{F}$ sein. Der Widerspruch löst sich — da $\varphi$ nicht gleich Null sein kann — nur in dem Falle, daß die Länge $\overline{rs}$ gleich Null wird.

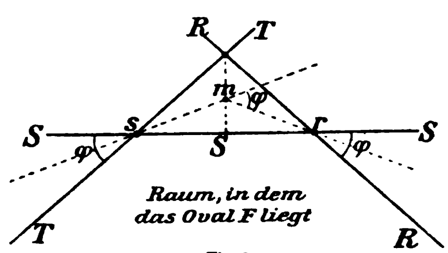


Fig. 5.

124. Nun denke man sich statt dreier Tangenten $n+1$ Tangenten, von denen jede mit den benachbarten den leeren Winkel $\varphi$ einschließt:

$$S_1, S_2, S_3 \dots S_n, S_{n+1},$$

bezeichne die Schnitte aufeinanderfolgender Tangenten mit

$$s_1, s_2, s_3 \dots s_n,$$

die auf $S_2, S_3 \dots S_n$ abgeschnittenen Strecken durch

$$\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3 \dots \sigma_n$$

und bestimme $n$ durch die Bedingung:

$$n\varphi \geqq \pi > (n-1)\varphi. \tag{83.}$$

Nach 119 und 120 sind die $s$ Punkte von $\mathfrak{F}$, und leicht erweislich geht die zu $S_1$ parallele Stützgerade $S_1'$ von $\mathfrak{F}$ durch $s_n$, während $s_1$ auf $S_1$ liegt. Man gelangt aber von $s_1$ nach $s_n$ über den Linienzug $\sigma_2 \sigma_3 \sigma_4 \dots \sigma_n$, der nach 123 aus lauter verschwindenden Strecken besteht. Also liegt $s_n$, mit $s_1$ sich deckend, auf $S_1$, $S_1'$ fällt mit $S_1$ zusammen.

125. Ganz den nämlichen Schluß kann man von $S_2$ ausgehend durchführen, so daß also auch $S_2$ und $S_2'$ zusammenfallen.

Da aber, nach den Eigenschaften der Stützgeraden, $\mathfrak{F}$ aus dem von $S_1, S_1', S_2, S_2'$ gebildeten Parallelogramm nicht heraustreten kann, und dieses selbst auf den Schnittpunkt $s_1$ von $S_1$ und $S_2$ sich reduziert, so haben wir:

126. *Die Ovale $\mathfrak{A}_1$ und $\mathfrak{A}_2$ bei* 114 *können für $b \gtrless 0$ nur identisch sein, wenn $\mathfrak{F}$ ein Punkt ist; dann sind sie es aber offenbar auch immer.*

127. *Für $\mu = 0$ sind natürlich die Ovale $\mathfrak{F} \dotplus \mu\mathfrak{F}$ und $(1+\mu)\mathfrak{F}$ unter allen Umständen identisch; der Fall $\mu = \infty$ läßt sich durch Rollenwechsel der Größen $\alpha$, $\beta$ bei* (50.) *auf den Fall $\mu = 0$ zurückführen.*

128. Fassen wir nun die Ergebnisse bei 111, 113, 126 und 127 zusammen, indem wir zugleich von $\mathfrak{F}$ auf $\mathfrak{E}$ zurückgehen, so erhalten wir den folgenden allgemeinen Satz:

*Die Identität:*

$$(a+bi)\mathfrak{E} \dotplus (a'+b'i)\mathfrak{E} \equiv (a+a'+(b+b')i)\mathfrak{E}$$

*gilt dann und nur dann, wenn mindestens eine der vier Bedingungen erfüllt ist:*

$\mathfrak{E}$ *ist ein Punkt,*

$\dfrac{a'+b'i}{a+bi}$ *ist eine reelle positive Größe,*

$$a+bi=0,$$

$$a'+b'i=0.$$

129. Indem wir die bei 108. eingeführte Beschränkung auf Ovale vorderhand wieder fallen lassen, nehmen wir den bei 73 unterbrochenen Faden der Hauptuntersuchung wieder auf. Satz (37.) kann nun auch so gefaßt werden:

*Wenn die $A_k$ Punkte des Eigebietes $\mathfrak{E}$ sind* (vergl. 26), *und es ist*

$$\varepsilon_0 \geqq \varepsilon_1 \geqq \varepsilon_2 \cdots \geqq \varepsilon_n < 0, \tag{84.}$$

*so ist*

$$\sum_0^n{}_k\, \varepsilon_k\, a_k \text{ ein Punkt des Eigebietes } \mathfrak{F},$$

$$\mathfrak{F} \equiv (\varepsilon_0 - \varepsilon_n)\mathfrak{E} \dot{-} (-\varepsilon_n)\mathfrak{E} \equiv (\varepsilon_0 - \varepsilon_n)\mathfrak{E} \dotplus \varepsilon_n \mathfrak{E}.$$

130. Soll der letzgenannte Punkt speziell auf der Begrenzung $F$ von $\mathfrak{F}$ liegen, soll also

$$\text{Punkt } p \equiv \sum_0^{n-1}{}_k (\varepsilon_k - \varepsilon_n)\, a_k \text{ des Eigebietes } \mathfrak{P} \equiv (\varepsilon_0 - \varepsilon_n)\mathfrak{E}$$

addiert zu

$$\text{Punkt } q \equiv \varepsilon_n \sum_0^n{}_k\, a_k \text{ des Eigebietes } \mathfrak{Q} \equiv \varepsilon_n \mathfrak{E}$$

einen Punkt auf der Begrenzung des Eigebietes

$$\mathfrak{P} \dotplus \mathfrak{Q} \equiv \mathfrak{F}$$

geben, so müssen nach 105 $p$ und $q$ auf parallelen, nach der nämlichen Seite liegenden Stützlinearen von $\mathfrak{P}$ und $\mathfrak{Q}$ liegen. Daraus folgt aber, bei dem positiven Charakter von $\varepsilon_0 - \varepsilon_n$ und dem negativen von $\varepsilon_n$:

131. Unter den bei 129 gemachten Voraussetzungen ist

$$\sum_0^n{}_k\, \varepsilon_k\, a_k \text{ ein Punkt von } F$$

dann und nur dann, wenn die $\mathfrak{E}$-Punkte

$$\frac{p}{\varepsilon_0 - \varepsilon_n} \equiv \sum_0^{n-1}{}_k \frac{\varepsilon_k - \varepsilon_n}{\varepsilon_0 - \varepsilon_n} \cdot a_k \quad \text{und} \quad \frac{q}{\varepsilon_n} \equiv \sum_0^n{}_k\, a_k$$

auf der Begrenzung $E$ von $\mathfrak{E}$ und außerdem auf zwei parallelen nach verschiedenen Seiten liegenden Stützlinearen $S, S'$ von $\mathfrak{E}$ liegen (die nur dann zusammenfallen können, wenn $\mathfrak{E}$ ganz in $S$ oder $S'$ enthalten ist).

132. Wegen

$$\varepsilon_0 \geqq \varepsilon_1 \geqq \varepsilon_2 \geqq \cdots \geqq \varepsilon_{n-1} \geqq \varepsilon_n$$

ist auch

$$(85.) \qquad 1 = \frac{\varepsilon_0 - \varepsilon_n}{\varepsilon_0 - \varepsilon_n} \geqq \frac{\varepsilon_1 - \varepsilon_n}{\varepsilon_0 - \varepsilon_n} \geqq \frac{\varepsilon_2 - \varepsilon_n}{\varepsilon_0 - \varepsilon_n} \geqq \cdots \geqq \frac{\varepsilon_{n-1} - \varepsilon_n}{\varepsilon_0 - \varepsilon_n} \geqq 0$$

und wir können den Werten der zweiten Reihe die Rolle der $\varepsilon$ in unseren früheren Kapiteln zuteilen. Die Gleichheitszeichen statt der Ungleichheitszeichen gelten in der zweiten Reihe nur, insofern sie auch an den entsprechenden Stellen der ersten gelten. Ist $\varepsilon_\nu$ der erste von den Werten $\varepsilon$, der gleich $\varepsilon_n$ wird, so läßt sich aus 44, 53, 58 schließen, daß alle 𝔈-Punkte der Art $(0\lambda_i)$ — vergl. 57 — die sich in der Reihe der Punkte

$$(00),\ (01)\ldots(0, \nu-1)$$

befinden, auf dem nämlichen Stützlinear $S$ wie

$$\frac{p}{\varepsilon_0 - \varepsilon_n} = \sum_0^{n-1}{}_k \frac{\varepsilon_k - \varepsilon_n}{\varepsilon_0 - \varepsilon_n} a_k = \sum_0^{\nu-1}{}_k \frac{\varepsilon_k - \varepsilon_n}{\varepsilon_0 - \varepsilon_n} a_k$$

liegen müssen, und umgekehrt, liegen sie auf einem Stützlinear $S$, so liegt auch $\frac{p}{\varepsilon_0 - \varepsilon_n}$ darauf. Wir können daher dem Satz 131 auch die folgende Form geben:

133. *Unter den bei 129 gemachten Voraussetzungen ist*

$$\sum_0^n{}_k\, \varepsilon_k a_k \text{ ein Punkt von } F$$

*dann und nur dann, wenn diejenigen von den Punkten*

$$A_i \equiv (0i)$$

$(i = 0, 1, 2, \ldots \nu-2$; *$\nu$ erster Wert der Reihe* $0, 1, 2 \ldots n$, der $\varepsilon_\nu = \varepsilon_n$ *macht*), *für welche*

$$\varepsilon_i > \varepsilon_{i+1}$$

*ist, dazu der Punkt $A_{\nu-1}$, zusammen auf einem Stützlinear $S$ von 𝔈 liegen und der Punkt $A_n$ auf dem zu $S$ parallelen Stützlinear $S'$ von 𝔈 sich befindet.*

134. Wenn

$$(86.) \qquad \varepsilon_0 \leqq \varepsilon_1 \leqq \varepsilon_2 \ldots \varepsilon_{n-1} \leqq \varepsilon_n \leqq 0$$

ist, so ist

$$-\varepsilon_0 \geqq -\varepsilon_1 \geqq -\varepsilon_2 \ldots -\varepsilon_{n-1} \geqq -\varepsilon_n \geqq 0.$$

Nach 26 und 31 ist also, wenn die $A_k$ Punkte von $\mathfrak{E}$ sind,

$$\sum_0^n{}_k(-\varepsilon_k a_k) \text{ ein Punkt von } -\varepsilon_0\mathfrak{E},$$

somit

$$\sum_0^n{}_k \varepsilon_k a_k \text{ ein Punkt von } \varepsilon_0\mathfrak{E}.$$

135. Durch das nämliche Verfahren einfachen Vorzeichenwechsels übertragen sich die Bedingungen, unter welchen für positive nirgends steigende $\varepsilon$ der Punkt $\Sigma\varepsilon_k a_k$ auf $\varepsilon_0 E$ liegt (vgl. 44—60) der Form nach unverändert auf unseren gegenwärtigen Fall mit den negativen nirgends fallenden $\varepsilon$.

136. Wenn

$$(87.)\qquad \varepsilon_0 \leqq \varepsilon_1 \leqq \varepsilon_2 \ldots \leqq \varepsilon_{n-1} \leqq \varepsilon_n > 0$$

ist, so ist

$$-\varepsilon_0 \geqq -\varepsilon_1 \geqq -\varepsilon_2 \ldots \geqq -\varepsilon_{n-1} \geqq -\varepsilon_n < 0$$

und es muß nach 129, wenn die $A_k$ Punkte von $\mathfrak{E}$ sind,

$$\sum_0^n{}_k(-\varepsilon_k)a_k \text{ ein Punkt des Eigebietes } -\mathfrak{F}$$

sein, wobei

$$-\mathfrak{F} \equiv -[(\varepsilon_0 - \varepsilon_n)\mathfrak{E} \dotplus \varepsilon_n\mathfrak{E}]$$

ist. Für den Punkt $\sum_0^n{}_k \varepsilon_k a_k$ erhält man unter Voraussetzung (87.) durch die Änderung des Vorzeichens dann formell genau dieselben Resultate, wie sie bei 129, und des weitern bei 131 und 133 unter Voraussetzung (84.) sich ergeben haben.

137. Es ist erfreulich, daß sich die bisherigen Resultate einheitlicher zusammenfassen lassen, wie folgt:

*Wenn die*

$$A_k \equiv \sum_0^k{}_\nu a_\nu \textit{ Punkte des Eigebietes } \mathfrak{E},$$

*die $\varepsilon_k$ eine monotone Reihe reeller Werte*

*sind, so ist*

$$(nn) \equiv \sum_0^n{}_k \varepsilon_k a_k \textit{ immer ein Punkt des Eigebietes } \mathfrak{F},$$

$$\mathfrak{F} \equiv (\varepsilon_0 - \varepsilon_n)\mathfrak{E} \dotplus \varepsilon_n\mathfrak{E}$$

*und kann auch speziell auf die Begrenzung $F$ von $\mathfrak{F}$ zu liegen kommen.*

*Wenn* $\frac{\varepsilon_0 - \varepsilon_n}{\varepsilon_n} > 0$ *und somit*

$$\mathfrak{F} \equiv \varepsilon_0 \mathfrak{E} \qquad (vgl.\ 127)$$

*ist, liegt* $(nn)$ *auf* $F$ *unter den Bedingungen, wie sie, zunächst für positive nicht steigende* $\varepsilon$ *abgeleitet, formell aber auch für negative nicht fallende* $\varepsilon$ *giltig, bei* 44—60 *angegeben sind.*

*Wenn* $\frac{\varepsilon_0 - \varepsilon_n}{\varepsilon_n} < 0$ *ist, liegt* $(nn)$ *auf* $F$ *unter den Bedingungen, wie sie, zunächst für die Voraussetzungen* (84.) *abgeleitet, formell aber auch für die Voraussetzung* (87.) *giltig, bei* 133 *angegeben sind.*

*Wenn* $\frac{\varepsilon_0 - \varepsilon_n}{\varepsilon_n} = 0$, *somit* $\varepsilon_0 = \varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \cdots = \varepsilon_n \neq 0$ *ist, so liegt* $(nn) \equiv \varepsilon_0(0n)$ *offenbar dann und nur dann auf* $F$, *wenn*

$$(0n) \equiv A_n \equiv \sum_0^n {}_k\, a_k$$

*auf* $E$ *liegt.*

*Wenn* $\frac{\varepsilon_0 - \varepsilon_n}{\varepsilon_n}$ *unendlich wird, wegen*

$$\varepsilon_{\mu-1} \neq 0, \quad \varepsilon_\mu = \varepsilon_{\mu+1} = \varepsilon_{\mu+2} = \cdots = \varepsilon_n = 0, \qquad (1 \leqq \mu \leqq n)$$

*so fällt* $(nn)$ *mit* $(\mu-1, \mu-1)$ *zusammen (vergl.* 65), *und es ist also durch eines der vorhergehenden Kriterien zu entscheiden, ob* $(\mu-1, \mu-1)$ *auf* $F$ *liegt.*

*Wenn* $\frac{\varepsilon_0 - \varepsilon_n}{\varepsilon_n}$ *unbestimmt wird, wegen* $\varepsilon_0 = \varepsilon_1 = \cdots = \varepsilon_n = 0$, *so liegt* $(nn)$ *immer auf* $F$, *weil* $(nn)$, $\mathfrak{F}$ *und* $F$ *sich auf den Nullpunkt reduzieren.*

**Komplexe $a$, komplexe monotone $\varepsilon$.**

138. Eine Reihe gewöhnlicher komplexer Größen

$$\varepsilon_k \equiv \varepsilon_k' + i\varepsilon_k''$$

soll monoton heißen, wenn sowohl die $\varepsilon_k'$ als die $\varepsilon_k''$ eine monotone reelle Reihe bilden, ohne daß die Reihe der $\varepsilon'$ mit der Reihe $\varepsilon''$ gerade „isoton" sein müßte. Auf Grund des Vorhergehenden ist für solche $\varepsilon$ ohne weiteres klar:

139. *Gehören die Punkte*

$$A_k \equiv \sum_0^k {}_\nu\, a_\nu$$

*zu dem Eigebiete* $\mathfrak{E}$, *und bilden die*

$$\varepsilon_k \equiv \varepsilon_k' + i\varepsilon_k''$$

*eine monotone Reihe, so ist*

$$\sum_0^n{}_k \varepsilon_k a_k \text{ ein Punkt des Eigebietes } \Omega$$

$$\Omega \equiv (\varepsilon_0' - \varepsilon_n') \mathfrak{E} \dotplus \varepsilon_n' \mathfrak{E} \dotplus i(\varepsilon_0'' - \varepsilon_n'') \mathfrak{E} \dotplus i\varepsilon'' \mathfrak{E}. \tag{88.}$$

140. Im Falle

$$\varepsilon_k = (c' + ic'')\zeta_k,$$

$c, c''$ konstant und die $\zeta_k$ monoton und reell sind, vereinfacht sich natürlich die Bestimmung 139 dahin, daß

$$\Omega \equiv (c' + ic'')[(\zeta_0 - \zeta_n) \mathfrak{E} \dotplus \zeta_n \mathfrak{E}] \tag{89.}$$

wird.

Auf weitere Einzelheiten gehen wir hier nicht ein.

---

# II.

## Von der Reihe $\varepsilon_0 a_0 + \varepsilon_1 a_1 + \varepsilon_2 a_2 + \cdots$.

**Komplexe $a$, reelle positive nirgends steigende $\varepsilon$.**

141. Die zum Eigebiet $\mathfrak{E}$ gehörigen Punkte

$$A_\nu \equiv (0\nu)$$

sollen nun eine unendliche Reihe bilden, ebenso wie die $a_\nu$ und die positiven nirgends steigenden $\varepsilon_\nu$, wodurch sich das Schema (2.) nach rechts und unten ins Unendliche ausdehnt. Außerdem sollen die $A_\nu$ sich mit wachsendem $\nu$ einem Grenzpunkte $A$ annähern:

$$\lim_{\nu=\infty} A_\nu = A, \tag{90.}$$

der infolge der Abgeschlossenheit von $\mathfrak{E}$ (vgl. 15.) auch zu $\mathfrak{E}$ gehören muß.

Wir setzen

$$\varepsilon_0 = 1 \text{ (vgl. 31)} \tag{91.}$$

und

$$\varepsilon_\nu \neq 0 \text{ ($\nu$ beliebig).} \tag{92.}$$

Über den Fall, wo die $\varepsilon_\nu$ von einer bestimmten Stelle an gleich Null werden, siehe die Bemerkung 173.

142. *Unter den gemachten Voraussetzungen nähern sich die Punkte*

$$\sum_0^n {}_\nu\, \varepsilon_\nu a_\nu \equiv (nn)$$

*mit wachsendem $n$ ebenfalls einem Grenzpunkte $A_\varepsilon$, der zu $\mathfrak{E}$ gehört:*

$$\lim_{n=\infty} \sum_0^n {}_\nu\, \varepsilon_\nu a_\nu = A_\varepsilon \tag{93.}$$

143. Beweis. Wir schreiben statt der Identität

$$\sum_{0}^{n+p} \varepsilon_\nu a_\nu \equiv \sum_{0}^{n} \varepsilon_\nu a_\nu + \sum_{n+1}^{n+p} \varepsilon_\nu a_\nu$$

zur Abkürzung

(94.) $$[0, n+p] \equiv [0, n] + [n+1, n+p].$$

Nach dem erweiterten Lemma 26 ist

$[0 n]$ ein Punkt von $\mathfrak{E}$,

$[n+1, n+p]$ ein Punkt innerhalb des Äquiradials $\varepsilon_{n+1} K'$,

wenn

$$A_{n+1} - A_n,\; A_{n+2} - A_n,\; A_{n-3} - A_n, \ldots A_{n+p} - A_n$$

Punkte innerhalb eines Äquiradials $K$ sind. Diese Punkte $A_{n+m} - A_n$ fallen aber für genügend großes $n$ ins Innere eines um den Nullpunkt geschlagenen Äquiradials $K$ mit beliebig kleinem Radius $\varrho$, weil für ein solches $n$ aus (90.) folgt:

(95.) $$|A_{n+m} - A_n| < \varrho,$$

wobei $m$ eine beliebige positive ganze Zahl, $|A_{n+m} - A_n|$ den absoluten Betrag der komplexen Größe $A_{n+m} - A_n$,*) anders ausgedrückt die „Entfernung“ des Punktes $A_{n+m}$ vom Punkte $A_n$ oder des Punktes $A_{n+m} - A_n$ vom Nullpunkt bedeutet.

So ergibt sich, daß für genügend großes $n$ jeder Punkt

$[0, n+p]$ ein Punkt innerhalb des Äquiradials mit $\begin{cases} \text{Radius } \varepsilon_{n+1}\varrho \\ \text{Zentrum } [0, n] \end{cases}$

und somit die Entfernung

(96.) $$\overline{[0, n+p]\,[0, n+p']} < 2\varepsilon_{n+1}\varrho,$$

d. h. beliebig klein ist. Die Punkte $[0, n]$ nähern sich also, wie behauptet, einem Grenzpunkt $A$.

Daß $A_e$ zu $\mathfrak{E}$ gehört, folgt in Anbetracht der Abgeschlossenheit von $\mathfrak{E}$ daraus, daß die Punkte $[0, n]$, deren Grenzpunkt $A_e$ ist, zu $\mathfrak{E}$ gehören.

*) D. h. die positive Quadratwurzel aus der Summe der Quadrate der reellen Koeffizienten, welche im expliziten Ausdruck von $A_{n+m} - A_n$ bei den einzelnen Einheiten stehen.

144. *Es erhebt sich wieder die Frage, welche besonderen Bedingungen erfüllt sein müssen, damit $A_\varepsilon$ auf der Begrenzung $E$ des Eigebietes $\mathfrak{E}$ liege. Notwendig ist jedenfalls, daß kein einziger Punkt $(\nu\nu)$, für den $\varepsilon_{\nu+1} < \varepsilon_\nu$ ist, innerhalb $E$ liege.*

145. Denn wäre dies der Fall, so müßte $A_\varepsilon$ auch innerhalb $E$ liegen, wie aus 39 leicht zu schließen ist. Hier wird klar, daß es wichtig war, bei 39 nicht nur das Innenliegen der Punkte $(ii)$ abzuleiten, sondern auch eine untere Grenze ihrer Enfernung von $E$ anzugeben; denn wüßten wir jetzt von den Punkten $(\nu\nu)$ bloß, daß sie innerhalb $E$ liegen, so könnte $A_\varepsilon$ möglicherweise auch noch auf $E$ liegen.

146. Wenn nun die Bedingung von 144 erfüllt ist, wenn also sämtliche Punkte $(\nu\nu)$, für welche $\varepsilon_{\nu+1} < \varepsilon_\nu$ ist — wir wollen sie im Anschluß an (16.) mit

$$(\lambda_0\lambda_0)\,(\lambda_1\lambda_1)\,(\lambda_2\lambda_2)\ldots(\lambda_k\lambda_k)\ldots(\lambda_\mu\lambda_\mu)$$

bezeichnen — auf $E$ liegen, so tun dies auch die Punkte

$$(0\lambda_0)\,(0\lambda_1)\,(0\lambda_2)\ldots(0\lambda_k)\ldots(0\lambda_\mu)$$

nach 44 und 58, da wir ja die $\varepsilon$ von Null verschieden vorausgesetzt haben; und zwar liegen sie alle auf ein und demselben Stützlinear $S$ — wobei nicht au geschlossen ist, daß es mehrere solche Stützlineare $S$ gibt, vergl. 158, 159 usw. — und bestimmen als Ecken einen linear begrenzten Körper $R_\mu$ (s. 46), der völlig zu $E$ und zu $S$ gehört, und der daher einen Teil des Eigebietes $E'$ ausmacht, das $E$ und $S$ gemein haben, oder auch mit demselben identisch ist. Zu $R_\mu$ gehören die sämtlichen Punkte (16.).

147. Daß das den Gebieten $E$ (oder auch $\mathfrak{E}$) und $S$ gemeinsame Gebiet $E'$ ein Eigebiet ist, erhellt aus folgendem: Entweder ist ein einziger Punkt $p$ gemeinsam — dieser ist ein Eigebiet — oder es sind mehrere gemeinsam, dann mögen zwei beliebige derselben $p$ und $p'$ heißen. $\overline{pp'}$ enthält als Verbindungsstrecke zweier $E$-Punkte nur Punkte auf oder innerhalb $E$, als Verbindungsstrecke zweier $S$-Punkte lauter $S$-Punkte, d. h. Punkte auf oder außerhalb $E$. $\overline{pp'}$ kann also nur Punkte *auf* $E$ enthalten, ist $E$ und $S$ gemeinsam, gehört zu $E'$. $E'$ ist also ein Gebiet, das die Verbindungsstrecken eigener Punkte ganz in sich enthält. $E'$ enthält aber auch alle Grenzpunkte eigener Punkte; denn $\mathfrak{E}$ und $S$ haben diese Eigenschaft und es gilt der Satz: „Sind zwei Gebiete $\mathfrak{E}$ und $S$ abgeschlossen, so ist es auch das ihnen gemeinsame Gebiet $E'$“, wie man folgendermaßen beweist: Eine Punktreihe in $E'$

gehört sowohl zu $\mathfrak{E}$ als $S$; hat sie also einen Grenzpunkt, so gehört er sowohl zu $\mathfrak{E}$ als $S$, somit auch zu $E'$. — $E'$ ist hiermit als (abgeschlossenes) Eigebiet nachgewiesen.

148. Es kann natürlich $\mu$ auch unendlich werden; dann gilt 146 für *jeden* ganzen positiven Index $\mu'$, den man statt $\mu$ dort einführt. Wenn $\mu$ unendlich groß ist, so gibt die aus der ersten Form 144 abgeleitete zweite Form 146 einer notwendigen Bedingung zugleich eine hinreichende Bedingung dafür ab, daß $A_\varepsilon$ auf $E$ liegt. Oder:

*Giebt es für*

$$\mu = \infty$$

*ein Stützlinear $S$ von $\mathfrak{E}$, auf dem sämtliche $\mathfrak{E}$-Punkte $(0\lambda_{\mu'})$ liegen, so liegen die $\mathfrak{E}$-Punkte $A$ und $A_\varepsilon$ ebenfalls auf $S$, somit auf $E$.*

149. Denn für unendlich großes $\mu$ lassen sich die in 146 und 144 gemachten Schlüsse umkehren wie folgt: Wenn die Punkte $(0\lambda_k)$, $k$ von 0 bis $\mu'$ erstreckt gedacht, sämtlich auf $E$ und zwar auf einem einzigen Stützlinear $S$ von $E$ liegen — sodaß dann zufolge 53 und 58 der ganze Körper $R_{\mu'}$ zu $S$ und zu $E$ gehört — so liegen die Punkte $(\lambda_k\lambda_k)$, die ja nach 51 und 58 zu $R_{\mu'}$ gehören, ebenfalls sowohl auf $E$ als $S$ und mit ihnen nach 147 der Grenzpunkt $A_\varepsilon$, dem sie sich, wie wir gleich zeigen werden, mit wachsendem $\mu'$ annähern, und $\mu$ darf ja nach 148 beliebig vergrößert werden.

$A_\varepsilon$ ist Grenzpunkt der $(\lambda_{\mu'}\lambda_{\mu'})$ als Grenzpunkt der $(\nu\nu)$, und weil offenbar die $(\nu\nu)$ und die $(\lambda_{\mu'}\lambda_{\mu'})$ sich dem nämlichen Grenzpunkt nähern müssen. Ganz ähnlich ist $A$ Grenzpunkt nicht nur der $(0\nu)$, sondern auch der $(0\lambda_{\mu'})$ und mit diesen nach 147 zu $E'$ und $E$ gehörig.

150, Es erübrigt nun nur noch, auch bei endlichem $\mu$ eine nicht nur notwendige, sondern auch hinreichende Bedingung dafür zu finden, daß $A_\varepsilon$ auf $E$ liegt. Wenn $\mu$ endlich ist, so werden von $\varepsilon_{\lambda_\mu+1}$ an sämtliche $\varepsilon_\nu$ einander gleich:

$$(97.)\qquad \varepsilon_{\lambda_\mu+1} = \varepsilon_{\lambda_\mu+2} = \varepsilon_{\lambda_\mu+3} = \varepsilon_{\lambda_\mu+4} = \cdots,$$

ebenso die durch die Transformationen $\left[\frac{\varepsilon_\nu}{\varepsilon_{\nu-1}}, (\nu-1, \nu-1)\right]$ aus $\mathfrak{E}$ nacheinander entstehenden Eigebilde $\mathfrak{E}^{(\nu)}$ (vgl. 27) von $\mathfrak{E}^{(\lambda_\mu+1)}$ an, und ihre Begrenzungen:

$$(98.)\qquad E^{(\lambda_\mu+1)} \equiv E^{(\lambda_\mu+2)} \equiv E^{(\lambda_\mu+3)} \equiv E^{(\lambda_\mu+4)} \equiv \cdots$$

Da $A_\varepsilon$ dann, wie die Punkte, deren Grenzpunkt es ist, zu $\mathfrak{E}^{(2\mu+1)}$ gehört, so kann es auf $E$ nur liegen, insofern es einem den Gebilden $E$ und $E^{(2\mu+1)}$ gemeinsamen Teile angehört. Wir haben also die Möglichkeit solcher gemeinsamen Teile des Nähern zu erörtern. Den weitern Entwicklungen schicken wir voraus zwei Hilfssätze

151. Hilfssatz. *Die Punkte*

$$A^{(1)}, A^{(2)}, A^{(3)}, A^{(4)} \ldots,$$

*in welche bei den aufeinanderfolgenden Ähnlichkeitstransformationen der bei* (90.) *definierte Punkt A übergeht, nähern sich für wachsenden obern Index dem Grenzpunkt* $A_\varepsilon$:

(99.) $$\lim_{\nu=\infty} A^{(\nu)} = A_\varepsilon.$$

152. Beweis. Für genügend großes $\nu$ wird wegen $\varepsilon_i \leqq 1$:

$$\overline{A^{(\nu)}(\nu\nu)} \leqq \overline{A(0\nu)},$$

wegen (90.):

$$\overline{A(0\nu)} < \delta,$$

wegen (93):

$$\overline{(\nu\nu)A_\varepsilon} < \delta',$$

also

$$\overline{A^{(\nu)}A_\varepsilon} < \delta + \delta',$$

wobei $\delta$ und $\delta'$, somit auch $\delta+\delta'$, beliebig klein vorgeschriebene Größen sein dürfen. Die $A^{(k)}$ nähern sich also dem $A_\varepsilon$ als Grenzpunkt.

Dieser Satz gilt abgesehen von irgendwelchen Voraussetzungen über $\mu$ und über die Lage von $A$ und $A_\varepsilon$.

153. Hilfssatz. *Wenn die bei* 144 *und* 146 *erwähnte Bedingung erfüllt ist, so gehören alle Punkte*

$$p^{(1)}, p^{(2)}, p^{(3)}, p^{(4)} \ldots,$$

*die durch die aufeinanderfolgenden Ähnlichkeitstransformationen aus einem Punkte p von E' hervorgehen, ebenfalls zu E'.*

154. Denn das erste Transformationszentrum (00) gehört entweder ebenso wie $p$ zu dem Eigebiete $E'$, dann gehört die ganze Strecke $\overline{(00)p}$ und auf ihr der Punkt $p^{(1)}$ zu $E'$ — oder (00) liegt außerhalb $S$ und $E'$, dann ist der Transformationsfaktor gleich der Einheit (vgl. 144) und der

Punkt $p^{(1)}$ gehört zu $E'$, weil er mit $p$ identisch ist. Also $p^{(1)}$ gehört jedenfalls zu $E'$. Analog schließt man bei der zweiten Transformation von $p^{(1)}$ auf $p^{(2)}$ usw.

155. Aus 153 folgt nun im Verein mit der Natur der Ähnlichkeitstransformationen:

$E'$ geht, wenn die bei 144 erwähnte Bedingung erfüllt und $\mu$ endlich ist, durch die $\lambda_{\mu+1}$ ersten aufeinanderfolgenden Transformationen in ein Eigebiet $E''$ über, das einen Teil von $E'$ und natürlich auch von $E^{(\lambda_\mu+1)}$ ausmacht.

$E$ und $E^{(\lambda_\mu+1)}$ haben also jedenfalls gemein das Eigebiet $E''$, welches als Teil von $E^{(\lambda_\mu+1)}$ betrachtet, dem $E'$, betrachtet als Teil von $E$, der Ähnlichkeit nach entspricht. Soll — für endliches $\mu$ — Punkt $A_s$ auf $E$ liegen, so kann nun also entweder

a) $A_s$ auf $E''$

oder

b) $A_s$ auf einem $E$ und $E^{(\lambda_\mu+1)}$ gemeinsamen, aber nicht zu $E''$ gehörigen Punkte

liegen. Verfolgen wir für beide Annahmen die notwendigerweise erfüllten Bedingungen noch etwas genauer. Zur Annahme a) erhalten wir den Satz:

156. *Liegt für endliches $\mu$ Punkt $A_s$ auf $E''$, so liegt $A$ auf $E'$, somit auf dem nämlichen Stützlinear $S$ von $E$ (vgl. übrigens* 158), *wie die Punkte* $(0\,\lambda_\varkappa)$.

157. Beweis. Unter den augenblicklichen Voraussetzungen sind die $A^{(\nu)}$ von $A^{(\lambda_\mu+1)}$ an alle identisch, somit ist ihr durch 112 nachgewiesener Grenzpunkt

$$A_s \equiv A^{(\lambda_\mu+1)}.$$

Gehört nun dieser Punkt, wie wir eben voraussetzen, zu $E''$ und somit zu $E'$, so muß auch $A^{(\lambda_\mu)}$, weiterhin $A^{(\lambda_\mu-1)}$, dann $A^{(\lambda_\mu-2)}$ usw., schließlich $A$ zu $E'$ gehören. Denn für jeden Schritt bei diesem Rückwärtsschließen gilt: Entweder ist $A^{(\nu-1)}$ mit $A^{(\nu)}$ identisch — nämlich wenn $\frac{\varepsilon_\nu}{\varepsilon_{\nu-1}}=1$ ist — oder $A^{(\nu-1)}$ liegt doch auf einer Geraden, welche $A^{(\nu)}$ mit dem Transformationszentrum $(\nu-1,\nu-1)$, d. h. jetzt einem der zu $E'$ gehörigen Punkte

$$(\lambda_0\lambda_0)\,(\lambda_1\lambda_1)\,(\lambda_2\lambda_2)\ldots(\lambda_\mu\lambda_\mu)$$

verbindet, gehört also zu $S$, wenn $A^{(\nu)}$ zu $S$, gehört. Dann gehört aber $A^{(\nu-1)}$ — weil es nicht außerhalb $E$ liegen kann — auch zu $E'$.

158. Gibt es mehr als ein Stützlinear $S$ von $E$, das die sämtlichen Punkte $(0\lambda_k)$ enthält, so gilt Satz 156 für jedes solche $S$; $A$ liegt also dann, wie die $(0\lambda_k)$, in dem Linear, das alle diese $S$ gemeinsam haben.

159. Die Annahme b) verlangt zunächst den Nachweis, daß $E$ und $E^{(\lambda_\mu+1)}$ überhaupt einen Punkt außerhalb $E''$ gemein haben können. Hierfür ist die in 158 ausgesprochene Bemerkung wichtig, daß es möglicherweise außer $S$ noch andere Stützlineare von $E$ durch die Punkte $(0\lambda_k)$ gibt; sei $S_1$ ein solches, und seien $E_1'$ und $E_1''$ die Eigebilde, welche dem $S_1$ in der nämlichen Weise zugeordnet sind, wie $E'$ und $E''$ dem $S$. Möglicherweise ist dann $E_1'$ von $E'$, $E_1''$ von $E''$ verschieden und enthält $E_1''$ noch andere Punkte als $E''$. Unsere Frage ist also zu bejahen, $E$ wird mit $E^{(\lambda_\mu+1)}$ unter Umständen Punkte auch außerhalb $E''$ und somit auch außerhalb $S$ gemein haben. Indes wird das folgende dartun:

160. *Ist $p^{(\mu+1)}$ ein den Figuren $E$ und $E^{(\lambda_\mu+1)}$ gemeinsamer Punkt außerhalb des durch die $(0\lambda_k)$ gehenden Stützlinears $S$ von $E$, so läßt sich immer ein anderes Stützlinear $S_p$ von $E$ finden, das ebenfalls durch die $(0\lambda_k)$ geht und $p^{(\mu+1)}$ mit enthält.*

161. Aus der Annahme, daß $p^{(\mu+1)}$ ein Punkt außerhalb $E''$ ist, folgt, daß er auch nicht zu $E'$, nicht zu $S$ und nicht zu dem von den Punkten $(0\lambda_k)$ aufgespannten (vgl. 16) Linear $L$ gehört, das nicht mit $S$ identisch zu sein braucht, sondern als Linear niedrigerer Stufe in $S$ enthalten sein kann.

162. Es sei nun $p$ der Punkt, welcher bei den mit den Faktoren

$$\frac{\varepsilon\lambda_0+1}{\varepsilon\lambda_0},\ \frac{\varepsilon\lambda_1+1}{\varepsilon\lambda_1},\ \frac{\varepsilon\lambda_2+1}{\varepsilon\lambda_2},\ \ldots\ \frac{\varepsilon\lambda_{\mu-1}+1}{\varepsilon\lambda_{\mu-1}},\ \frac{\varepsilon\lambda_\mu+1}{\varepsilon\lambda_\mu}$$

ausgeführten, sozusagen allein wirksamen Transformationen — die mit dem Faktor 1 ausgeführten brauchen wir nicht in Betracht zu ziehen — über die Zwischenlagen

$$p^{(1)},\ p^{(2)},\ p^{(3)},\ \ldots\ p^{(\mu-1)},\ p^{(\mu)}$$

endlich in

$$p^{(\mu+1)}$$

übergegangen ist. Offenbar müssen die Punkte $p, p^{(1)}, p^{(2)} \ldots p^{(\mu)}$ alle auf $E$ liegen, weil das Resultat der letzten Transformation, der Punkt $p^{(\mu+1)}$, auf $E$ liegt. Denn wenn ein Punkt $p$ lauter aufeinanderfolgenden Transformationen mit nicht verschwindenden Faktoren unterworfen wird, so kann er

zufolge der bei 22 angegebenen Eigebietseigenschaften niemals wieder auf die Oberfläche von $\mathfrak{E}$ gelangen, wenn er erst einmal davon verschwunden ist, ganz gleich ob die Transformationszentren innerhalb oder auf $E$ liegen.

163. Es muß nun das durch die Punkte

$$p(\lambda_0\lambda_0)(\lambda_1\lambda_1)\ldots(\lambda_\mu\lambda_\mu)$$

bestimmte Eigebiet (vgl. 49) — wir wollen es $R_p$ nennen — ganz zu $E$ gehören. Den Beweis deuten wir nur an; er ist ganz ähnlich zu führen, wie bei 46, indem man — immer das vorhergehende Ergebnis für das folgende verwertend — nachweist, daß eine ganze Reihe von Eigebieten, die durch gewisse $E$-Punkte bestimmt werden, zu $E$ gehören müssen, nämlich

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | das durch | $p, (\lambda_0\lambda_0)$ | bestimmte, | weil auch sein Punkt | $p^{(1)}$ | zu $E$ | gehört |
| | „ „ | $p, (\lambda_0\lambda_0), (\lambda_1\lambda_1)$ | „ | „ „ „ „ | $p^{(2)}$ | „ „ | „ |
| (100.) | „ „ | $p, (\lambda_0\lambda_0), (\lambda_1\lambda_1), (\lambda_2\lambda_2)$ | „ | „ „ „ „ | $p^{(3)}$ | „ „ | „ |
| | | $\vdots$ | | $\vdots$ | $\vdots$ | | |
| | „ „ | $p, (\lambda_0\lambda_0), (\lambda_1\lambda_1)\ldots(\lambda_\mu\lambda_\mu)$ | „ | „ „ „ „ | $p^{(\mu+1)}$ | „ „ | „. |

164. Die Punkte $(\lambda_k\lambda_k)$ spannen, da die $\varepsilon$ von Null verschieden vorausgesetzt worden sind, das nämliche Linear $L$ auf, wie die Punkte $(0\lambda_k)$, vgl. 64. Der Punkt $p^{(\mu+1)}$ liegt nach 160 und 161 außerhalb $L$, folglich auch $p$; denn läge $p$ in $L$, so müßte, wie leicht zu sehen, auch $p^{(\mu+1)}$ in $L$ liegen. Die Punkte

$$p(\lambda_0\lambda_0)(\lambda_1\lambda_1)\ldots(\lambda_\mu\lambda_\mu)$$

spannen daher ein Linear $L_p$ auf, dessen Stufe um 1 höher ist als die von $L$, und auch die Punkte

$$p(0\lambda_0)(0\lambda_1)\ldots(0\lambda_\mu)$$

spannen das Linear $L_p$ auf.

165. In diesem von ihm aufgespannten Linearraum $L_p$ betrachtet, hat $R_p$ — wenn es sich nicht auf einen Punkt reduziert — nach 16 sicher einen innern Punkt $i$, und durch $i$ geht nach 21 mindestens ein Stützlinear $S_p$ von $E$, das $R_p$ samt seinem Punkt $p^{(\mu+1)}$ (vgl. (100.)) enthalten muß; die gegenteilige Annahme würde auf den Widerspruch führen, daß Punkte von $R_p$ und also von $E$ zu *verschiedenen* Seiten des Stützlinears $S_p$ lägen. Hieraus folgt weiter, daß das ganze durch die Punkte $(\lambda_k\lambda_k)$ aufgespannte Linear $L$ zu $S_p$ gehört und mit ihm nach 64 auch die Reihe der Punkte $(0\lambda_k)$,

so daß also schließlich die Gesamtheiten auch der Punkte

$$p \quad (0\lambda_0)\,(0\lambda_1)\ldots(0\lambda_\mu)$$

und der Punkte

$$p^{(\mu+1)}(0\lambda_0)\,(0\lambda_1)\ldots(0\lambda_\mu)$$

in $S_p$ liegen müssen, mit ihnen die durch diese Punkte bestimmten Eigebiete.

166. Sollte $R_p$ sich aber auf einen einzigen Punkt reduzieren, so müßte $p$ dieser einzige Punkt sein; ein Punkt $(0\lambda_k)$ könnte überhaupt nicht existieren, denn die $(0\lambda_k)$ liegen, wenn sie existieren, in einem von $p$ getrennten Linear $L$. Demnach würden sämtliche $\varepsilon$ gleich 1, $p^{(\mu+1)}$ würde mit $p$, $A_\varepsilon$ mit $A$ identisch werden; die Behauptung des Satzes 160 würde mit der einfachern übereinkommen, daß durch den $E$-Punkt $p^{(\mu+1)}$ immer ein Stützlinear $S_p$ von $E$ geht, und notwendig sowie hinreichend dafür, daß $A_\varepsilon$ auf $E$ läge, würde die Bedingung sein, daß $A$ auf $E$ läge.

Für jeden Fall ist die Existenz eines Stützlineares, wie es in 160 verlangt wird, nun nachgewiesen.

167. Möglicherweise gibt es auch jetzt wieder mehr als *ein* solches Stützlinear $S_p$. Diese Möglichkeit fällt natürlich fort, sowie durch $p$ nicht mehr als ein Stützlinear von $E$ geht. Zugleich erkennt man hier, daß die Annahme eines Puukte $p$, wie wir ihn charakterisiert haben, mit Notwendigkeit fordert, daß durch die Punkte $(0\lambda_k)$ mehr als *ein* Stützlinear von $E$ geht. Denn läge auch nur ein einziger Punkt $(0\lambda_k)$ auf nicht mehr als *einem* Stützlinear von $E$, so würde $S_p$ mit $S$ identisch und $p$ ein Punkt von $E'$ sein müssen, mit ihm $p^{(\mu+1)}$, wider die Voraussetzung.

168. Ist nun — um zum eigentlichen, bei 159 verlassenen Thema zurückzukehren — für endliches $\mu$ der Punkt

$$A_\varepsilon \equiv A^{(\lambda_\mu+1)}$$

mit einem außerhalb $E''$ gelegenen Punkte $p^{(\mu+1)}$ identisch, so ist $A$ mit $p$ identisch (vgl. 151) und es muß nach 165, 166 mindestens ein Stützlinear $S_p$ von $E$ geben, das sowohl $A$ als die Punkte $(0\lambda_k)$ in sich enthält.

Dieses Ergebnis läßt sich mit dem bei 156 erhaltenen zu dem allgemeineren Satze vereinigen:

169. *Soll, für endliches $\mu$, $A_\varepsilon$ auf $E$ liegen, so ist notwendige Bedingung, daß mindestens* ein *Stützlinear vorhanden ist, das sowohl den Punkt $A$ als die Punkte $(0\lambda_k)$ in sich enthält.*

170. Hiermit haben wir aber zugleich eine *hinreichende* Bedingung gefunden. Denn wenn für endliches $\mu$ die $(0\lambda_k)$ und $A$ zusammen auf einem Stützlinear $S$ von $E$ liegen, genauer gesagt auf dem $S$ und $E$ gemeinsamen Eigebiete $E'$, so müssen nach Hilfssatz 153 auch sämtliche $A^{(\nu)}$ zu $E'$ gehören, mit ihnen ihr durch den Hilfssatz 151 nachgewiesener Grenzpunkt $A_\varepsilon \equiv A^{(\lambda_\mu+1)}$. Bezüglich der Strenge des letzten Schlusses vergleiche man den Schluß von 147.

171. Durch Vereinigung des eben für endliches $\mu$ erhaltenen Ergebnisses mit dem bei 146 und 148 für unendliches $\mu$ erhaltenen ergibt sich schließlich:

*Eine notwendige und hinreichende Bedingung dafür, daß $A_\varepsilon$ auf $E$ liegt, besteht darin, daß die Punkte $(0\lambda_k)$ und der Punkt $A$ auch auf $E$ und zwar auf (mindestens) einem sie gemeinsam enthaltenden Stützlinear von $E$ gelegen sind, das dann auch $A_\varepsilon$ enthält. Für unendlich großes $\mu$ liegt $A$ von selbst auf einem Stützlinear $S$ von $E$, wenn die $(0\lambda_k)$ darauf liegen, für endliches $\mu$ dagegen ist das nicht selbstverständlich.*

172. Der Satz gilt für ein der Einheit gleiches $\varepsilon_0$; doch können wir sofort verallgemeinern und sagen:

*Wenn die positiven nicht verschwindenden $\varepsilon$ eine nirgends steigende unendliche Reihe bilden, wenn ferner die Punkte $A_\lambda$ einem Eigebiete $\mathfrak{E}$ angehören und mit wachsendem $\lambda$ einem Grenzpunkte $A$ zustreben, so daß also*

$$\lim_{\nu=\infty} \sum_0^\nu{}_k\, a_k = A$$

*ist, so ist der stets vorhandene Punkt*

$$\lim_{\nu=\infty} \sum_0^\nu{}_k\, \varepsilon_k a_k = A_\varepsilon$$

*ein Punkt des Eigebietes $\varepsilon_0\mathfrak{E}$. Auf der Begrenzung $\varepsilon_0 E$ von $\varepsilon_0\mathfrak{E}$ liegt er dann und nur dann, wenn sämmtliche Punkte $(0\lambda_k)$ — vgl. (57.) — und mit ihnen $A$ auf der Begrenzung $E$ von $\mathfrak{E}$ und zugleich in einem gemeinsamen Stützlinear $S$ von $\mathfrak{E}$ gelegen sind, und zwar liegt dann $A_\varepsilon$ auf dem Stützlinear $\varepsilon_0 S$ von $\varepsilon_0\mathfrak{E}$.*

Bezüglich der Art, wie dieses Ergebnis mehr analytisch zu formulieren sein würde, vergleiche man Abschnitt 59 u. ff.

173. Wir haben zu Beginn des Kapitels die Annahme

$$\varepsilon_\nu \neq 0$$

gemacht. Würde ein $\varepsilon_\nu$, etwa $\varepsilon_{n+1}$, gleich Null sein, so würden auch $\varepsilon_{n+2}$,

$\varepsilon_{n+3}$, $\varepsilon_{n+4}$ usw. sämtlich Null sein müssen, die Beschaffenheit der Elemente $a_{n+1}$, $a_{n+2}$, $a_{n+3}$ usw. würde für die Lage des Punktes $A_\varepsilon$ völlig gleichgiltig werden; insbesondere könnte man auch nicht schließen, daß $A$ für $\varepsilon_0 = 1$ im allgemeinen auf dem nämlichen Stützlinear liegen müßte, wie $A_\varepsilon$ und die $(0\lambda_k)$, sondern die Rolle von $A$ würde durch den Punkt $A_n$ übernommen werden. Man würde es mit einer endlichen Summe $\sum_0^n{}_\nu\, \varepsilon_\nu a_\nu$ zu tun haben, wie sie schon im Kapitel I abgehandelt ist.

#### Komplexe $a$, reelle monotone $\varepsilon$.

174. Wenn wir nun auch bei unendlich vielen Elementen den Übergang von positiven nirgends steigenden $\varepsilon$ zu monotonen im allgemeinen machen wollen, so kann uns das von 71 bis 137 reichende Kapitel, welches den nämlichen Schritt ausführt im Fall einer endlichen Anzahl von Elementen, als Muster dienen.

175. Zunächst seien die $\varepsilon_\lambda$ nirgends steigend

$$\varepsilon_0 \geqq \varepsilon_1 \geqq \varepsilon_2 \geqq \cdots \geqq \varepsilon_\lambda \cdots,$$

aber nicht oder wenigstens nicht sämtlich $\geqq 0$ angenommen. Man wird ausschließen müssen, daß sie über jede angebbare negative Größe hinaus gegen $-\infty$ abnehmen; damit wird aber auch gewährleistet sein, daß sie sich einer bestimmten endlichen Grenze

$$\varepsilon < 0$$

annähern.

176. In der Identität

$$\sum_0^\infty{}_\lambda (\varepsilon_\lambda - \varepsilon) a_\lambda + \varepsilon \sum_0^\infty{}_\lambda a_\lambda = \sum_0^\infty{}_\lambda \varepsilon_\lambda a_\lambda \tag{101.}$$

abgekürzt

$$p + q = r$$

ist der erste Term, wegen der sicher nicht negativen Koeffizienten $(\varepsilon_\lambda - \varepsilon)$ ein Punkt $p$ von $(\varepsilon_0 - \varepsilon)\mathfrak{E}$, der zweite ein Punkt $q$ von $\varepsilon\mathfrak{E}$, folglich der dritte ein Punkt $r$ des Punktsummeneigebietes

$$(\varepsilon_0 - \varepsilon)\mathfrak{E} \dotplus \varepsilon\mathfrak{E}. \tag{102.}$$

Es scheint nun aber hier sich ein wesentlicher Unterschied zu ergeben, je nachdem die $\varepsilon_\lambda$ für jedes endliche $\lambda$ von $\varepsilon$ verschieden bleiben oder nicht.

177. Bleiben sie verschieden, so scheint es, als ob der Punkt $r$ *nur innerhalb* des Eigebietes (102.) liegen könne, *nicht aber auf* der Begrenzung

$$(103.) \qquad (\varepsilon_0 - \varepsilon) E \dotplus \varepsilon E$$

desselben. Denn wenn er auf dieser liegen sollte, so müßten die Punkte

$$\frac{\sum_0^\infty \lambda (\varepsilon_\lambda - \varepsilon) a_\lambda}{\varepsilon_0 - \varepsilon} \equiv A'_\varepsilon, \quad \sum_0^\infty a_\lambda \equiv A$$

auf zwei verschiedenen parallelen Stützlinearen von $\mathfrak{E}$ liegen nach 106, sie müßten mit allen Punkten $(0\lambda_k)$ auf ein und demselben Stützlinear von $\mathfrak{E}$ liegen nach 171, ein Widerspruch, der sich nur in dem Falle lösen kann, daß $\mathfrak{E}$ mindestens in einer bestimmten Richtung zwei zusammenfallende Stützlineare hat, somit „degeneriert" und in dem der Betrachtung zu Grunde gelegten Raume überhaupt keine inneren Punkte aufweist.

Man scheint also schließen zu können:

178. *Wenn die $A_\lambda$ dem Eigebiet $\mathfrak{E}$ (mit der Begrenzung $E$) angehören und für*

$$\varepsilon_0 \geqq \varepsilon_1 \geqq \varepsilon_2 \geqq \varepsilon_3 \geqq \cdots \geqq \varepsilon_\lambda \geqq \cdots,$$

$$\lim \varepsilon_\lambda = \varepsilon,$$

$$\varepsilon < 0, \qquad \varepsilon < \varepsilon_\lambda \quad (\lambda \text{ beliebig}),$$

*der Punkt*

$$\sum_0^\infty \lambda\, \varepsilon_\lambda a_\lambda$$

*auf dem Eigebilde*

$$(\varepsilon_0 - \varepsilon) E \dotplus \varepsilon E$$

*liegt, so müssen die Eigebiete*

$$\mathfrak{E}, \varepsilon \mathfrak{E}, (\varepsilon_0 - \varepsilon) \mathfrak{E}, (\varepsilon_0 - \varepsilon) \mathfrak{E} \dotplus \varepsilon \mathfrak{E}$$

*sämtlich degenerieren, d. h. weniger Dimensionen haben, als der Raum, in welchem die Betrachtungen vorgenommen werden.*

179. Sollte sich dieser Schluß bewähren, so würde sich die Frage auftun nach Bestimmung eines enger begrenzten Gebietes, dem der Punkt $r$ angehören muß.

180. Bei einer endlichen Anzahl von Elementen $a$ wurde das Auftreten des nämlichen Widerspruches nur durch das Verschwinden des letzten

Gliedes in $\sum_0^n k\,(\varepsilon_k - \varepsilon_n)\,a_k$ (vgl. (33.) und (34.)) hintangehalten; ebensowenig tritt er nun auf in dem Falle, daß in der unendlichen Reihe der $\varepsilon_\lambda$ von einem bestimmten Gliede $\varepsilon_{n+1}$ an alle gleich werden; denn dann ist

$$\sum_0^\infty \lambda \frac{\varepsilon_\lambda - \varepsilon}{\varepsilon_0 - \varepsilon}\,a_\lambda = \sum_0^n \lambda \frac{\varepsilon_\lambda - \varepsilon}{\varepsilon_0 - \varepsilon}\,a_\lambda$$

und der bei 177 gezogene Schluß, daß $A$ mit $A'_\varepsilon$ und den Punkten $(0\lambda_k)$ auf ein und demselben Stützlinear von $\mathfrak{E}$ liegen muß, wird hinfällig (vgl. 173).

181. Wenn

$$\varepsilon_0 \leqq \varepsilon_1 \leqq \varepsilon_2 \leqq \varepsilon_3 \cdots \leqq \varepsilon_\lambda \leqq \cdots$$

und

$$\varepsilon \leqq 0$$

ist, so gehört der Punkt $\sum_0^\infty \lambda\;\varepsilon_\lambda\,a_\lambda$ stets zum Eigebiet $\varepsilon_0\,\mathfrak{E}$, zur Begrenzung $\varepsilon_0\,E$ dieses Eigebietes speziell dann, wenn formell die nämlichen Bedingungen erfüllt sind, wie wir sie bei 172 für eine nirgends steigende Reihe der $\varepsilon_\lambda$ und für positives, höchstens verschwindendes $\varepsilon$ erhalten haben. Dies folgt durch Vorzeichenwechsel aus den früheren Resultaten.

182. Wenn schließlich die $\varepsilon_\lambda$ nirgends fallen:

$$\varepsilon_0 \leqq \varepsilon_1 \leqq \varepsilon_2 \leqq \cdots \leqq \varepsilon_\lambda \leqq \cdots,$$

und

$$\varepsilon > 0$$

angenommen wird, so erhält man der Form nach die nämlichen Ergebnisse, wie wir sie bei 175—180 für nirgends steigende $\varepsilon_\lambda$ und negatives $\varepsilon$ erhalten haben. Man kann zusammenfassen wie folgt:

183. *Wenn die unendlich vielen Punkte $A_\lambda$ zum Eigebiet $\mathfrak{E}$ gehören und einem Grenzpunkte $A$ sich nähern, und die Koeffizienten $\varepsilon_\lambda$ eine monotone unendliche Reihe von reellen endlichen, einem endlichen Wert $\varepsilon$ sich nähernden Werten bilden, so gehört der Punkt*

$$A_\varepsilon \equiv \lim_{\lambda=\infty} \sum_0^\lambda k\,\varepsilon_k\,a_k$$

*zum Eigebiete*

$$\mathfrak{J} \equiv (\varepsilon_0 - \varepsilon)\,\mathfrak{E} \dotplus \varepsilon\mathfrak{E}.$$

*Auf der Begrenzung $J$ dieses Gebietes liegt er für*

$$\infty \geqq \frac{\varepsilon_0 - \varepsilon}{\varepsilon} \geqq 0$$ (*Unbestimmter Wert* $\frac{0}{0}$ *ausgeschlossen*), $\mathfrak{J} \equiv \varepsilon_0 \mathfrak{E}$ (vgl. 128.)

*dann und nur dann, wenn sämtliche Puntke* $(0\lambda_k)$ *— vgl.* 57 *— und mit ihnen A auf der Begrenzung E von* $\mathfrak{E}$ *und zugleich in einem gemeinsamen Stützlinear S von* $\mathfrak{E}$ *gelegen sind, und zwar liegt dann* $A_\varepsilon$ *auf dem Stützlinear* $\varepsilon_0 S$ *von* $\varepsilon_0 \mathfrak{E}$.

*Wenn dagegen*

$$\frac{\varepsilon_0 - \varepsilon}{\varepsilon} < 0$$

*ist, so liegt* $A_\varepsilon$ *auf J nur dann, wenn entweder* $\mathfrak{E}$ *„degeneriert" und in dem der Betrachtung zu Grunde gelegten Raume gar keine inneren Punkte aufweist, oder wenn für ein angebbares endliches n*

$$\varepsilon_{n+1} = \varepsilon_{n+2} = \varepsilon_{n+3} = \cdots = \varepsilon_{n+m} = \cdots \text{ in inf. } = \varepsilon$$

*wird und zugleich die Punkte*

$$A'_\varepsilon \equiv \sum_0^n{}_\lambda \frac{\varepsilon_\lambda - \varepsilon}{\varepsilon_0 - \varepsilon} a_\lambda, \quad A = \lim_{\lambda=\infty} \sum_0^\lambda{}_k a_k$$

*auf E und zwar auf zwei nach verschiedenen Seiten liegenden parallelen Stützlinearen S und S' von E liegen. Zur Entscheidung darüber, ob* $A'_\varepsilon$ *auf E liegt, ist wieder der Satz* 59 *zu vergleichen.*

*Für den Fall*

$$\frac{\varepsilon_0 - \varepsilon}{\varepsilon} = \frac{0}{0}$$

*muß*

$$\varepsilon_0 = \varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \cdots = \varepsilon$$

*sein, der Punkt* $A_\varepsilon$, *das Eigebiet* $\mathfrak{J}$ *und seine Begrenzung J fallen alle drei mit dem Nullpunkt zusammen;* $A_\varepsilon$ *liegt also dann stets auf J, welche Lage auch die Punkte* $A_0, A_1, A_2 \ldots A$ *haben mögen.*

---

# III.

## Vom Integral $\int f(x,y)\, g(x,y,i)\, d(x+iy)$.

(Verallgemeinerung des zweiten Mittelwertsatzes der bestimmten Integrale.)

184. Das *Abel*sche Lemma ist zuerst von *O. Bonnet* auf bestimmte Integrale einer reellen Variabeln angewendet worden; dann haben unabhängig voneinander und wohl ohne Kenntnis des *Bonnet*schen Satzes oder wenigstens ohne Bewußtsein seiner nahen Verwandtschaft mit dem ihrigen *Weierstraß* und *P. Du Bois-Reymond* einen Integralsatz gefunden, der sich zum *Bonnet*schen analog verhält, wie das auf monotone $\varepsilon$ verallgemeinerte *Abel*sche Lemma zu der ursprünglich von *Abel* gegebenen, nur auf positive nicht steigende $\varepsilon$ bezüglichen Form. Manche späteren haben neue Beweise hinzugefügt oder die vorhandenen modifiziert und schließlich hat Herr *A. Pringsheim* in einer zusammenfassenden kritischen Studie durch Angabe eines sorgfältig ins einzelne ausgearbeiteten Beweises gewisse Lücken ausgefüllt, die seine Vorgänger gelassen hatten.*)

### AN DIE BONNETSCHE FORM ANKNÜPFEND.

$f(x,y)$ reell, auf dem Integrationswege nirgends steigend.

185. Wir wollen hier, anschließend an die vorausgehenden Kapitel, Integrale im Gebiet einer komplexen Variable $z = x + iy$ behandeln und zuerst eine Verallgemeinerung des *Bonnet*schen Satzes vornehmen. Der *Bonnet*sche Satz hat zwei Formen:

$$(104.)\qquad f(a)A < \int_a^b f(x)\, g(x)\, dx < f(a)B;$$

*) Münchener Sitzungs-Berichte, math.-phys. Kl. 1900, Bd. XXX, S. 209 u. ff.

(105.) $$\int_a^b f(x)g(x)\,dx = f(a)\int_a^{\xi} g(x)\,dx.$$

Beide Male bezeichnet $f(x)$ eine von $x=a$ bis $x=b$ positive, nirgends steigende Funktion, und müssen $g(x)$ und $f(x)g(x)$ in diesem Intervall integrabel sein.

$A$ und $B$ können eine untere und obere Grenze bedeuten, die von den Werten

(106.) $$\int_a^x g(x)\,dx \qquad (a \leqq x \leqq b)$$

nicht überschritten wird, oder auch speziell das Minimum und Maximum dieser Werte, in welchem Falle unter Umständen in (104.) statt der Ungleichheitszeichen auch Gleichheitszeichen eintreten; $\xi$ ist ein mittlerer Wert zwischen $a$ und $b$.

Die Voraussetzungen für die Giltigkeit der Form (105.) sind keine anderen als für die Form (104.), wenn man den Satz, daß das Integral eine stetige Funktion seiner oberen Grenze ist, als unbestreitbar annehmen darf.

Bei unserer Verallgemeinerung auf komplexe Größen werden sich zwei ganz analoge Formen darbieten; doch werden dieselben weiter auseinandertreten als im reellen Falle, da die Bedingungen für ihre Anwendbarkeit sich merklich differenzieren.

## Vom Integrationswege.

186. Der Integrationsweg gibt bei reellen Integralen über eindeutige Funktionen zu keinen Bemerkungen Anlaß, da er unzweideutig vorgeschrieben ist. Im Interesse unmittelbar zu erreichender Allgemeinheit der Ergebnisse würde es sich freilich empfehlen, die *Eindeutigkeit* der zu integrierenden Funktion häufiger, als es bisher geschieht, in einem etwas erweiterten Sinne zu verstehen, nicht im elementarsten, sondern mehr analog der Eindeutigkeit, wie sie bei aufeinanderbezogenen Ebenen durch *Riemann*sche Flächen hergestellt wird. Ich meine, man sollte der Integrationsvariable $x$ ein Hin- und Herwandern im Integrationsintervall gestatten, den Begriff einer Reihenfolge ihrer Werte dabei festhalten, ihn durch Beziehung der $x$-Werte auf eine *monoton* sich ändernde Variable $t$ zum Ausdruck bringen und die Eindeutigkeit der $y$ in bezug auf $t$ fordern statt in bezug auf $x$. In diesem Sinne auf-

gefaßt, bietet auch die *reelle* eindeutige Funktion schon allerhand Modifikationen des Integrationsweges beim Integrieren dar, bietet gewisse Analogien für das folgende.

187. Bei Integrationen über Funktionen komplexer Variabeln, mit andern Worten durch ein ebenes Gebiet, steht für die Gestaltung des Integrationsweges eine unverhältnismäßig viel größere Mannigfaltigkeit von Formen zur Verfügung als bei Integrationen im reellen Gebiet, längs einer Geraden. Der Integrationsweg erheischt hier also unbedingt besondere Berücksichtigung. Eine allgemeine Definition von „Kurve" oder „Weg", noch besser gesagt: Die Untersuchung, welche äußerste Ausdehnung diesem Begriffe je nach den vorliegenden Umständen gegeben werden darf, ist nun bekanntlich ein nicht unschwieriges Problem für sich. Ich will hier angeben, welche Bedingungen ich im folgenden vom Integrationswege als erfüllt annehme, und lasse im übrigen die Frage offen, ob die zu bringenden Sätze nicht vielleicht für noch allgemeiner zu definierende Integrationswege giltig bleiben.

188. Die Punkte des Integrationsweges, anders ausgedrückt die Koordinaten $x, y$ derselben seien auf eine reelle monoton steigende stetige unabhängige Veränderliche $t$ bezogen, so daß der kleinste Wert $t_0$ von $t$ dem Anfangspunkt $x_0, y_0$, der größte Wert $t'$ von $t$ dem Endpunkt $x', y'$ des Weges entspricht:

$$(107.)\qquad x = \varphi(t), \qquad y = \psi(t)$$

($\varphi, \psi$ eindeutige Funktionen von $t$).

Die Punkte des Weges werden dadurch in Reihe gesetzt. Auch dürfen wir als ausgeschlossen betrachten, daß für sämtliche Werte eines wenn auch noch so kleinen endlichen $t$-Intervalles der Punkt $x, y$ fest bleibt.

189. Der Integrationsweg sei stetig zusammenhängend, weil die landläufige Integraldefinition auf diese Voraussetzung zugeschnitten ist. Im Zusammenhang mit 188 erfordert dies, daß $\varphi(t)$ und $\psi(t)$ *stetige* Funktionen von $t$ seien.

190. Für jede Stelle $t$ des Integrationsweges bleibe

$$\int_{t=t_0}^{t=t} \sqrt{dx^2 + dy^2} < G, \qquad (\sqrt{dx^2 + dy^2} \text{ positiv!})$$

d. h. kleiner als ein und dieselbe angebbare endliche positive Größe. Diese

Voraussetzung ist nötig für den im Beweise des Hauptsatzes bei (133.) stattfindenden Schluß.

191. Ausdrücklich sei bemerkt, daß die Variable $t$ nur eingeführt wird, um die Wertepaare $x, y$ in Reihe zu setzen, noch genauer gesagt, um die $x$-Werte in eine — unter Umständen zu den nämlichen Zahlwerten zurückkehrende — bestimmte Reihe zu setzen und jedem $x$-Wert eindeutig sein $y$ zuzuordnen. Nicht aber soll mittels $t$ eine Transformation unserer Integrale ausgeführt werden. Die Forderung der Transformierbarkeit würde die Anzahl der von unseren Funktionen zu erfüllenden Bedingungen unnötig vermehren.

## Erste Form der Verallgemeinerung.

### *Geometrische Einkleidung.*

192. Die „wegweisende" Variable $t$ bewegt sich im Folgenden stets in dem Intervall

(108.) $$t_0 \leqq t \leqq t'.$$

Die komplexen Größen werden vermittelst einer „reellen" und einer „imaginären" Achse als Punkte *einer* Ebene repräsentiert gedacht.

Die den Werten (108.) entsprechenden Punkte

(109.) $$x+iy, \quad \int_{t=t_0}^{t=t} g(x,y,i)\,d(x+iy), \quad \int_{t=t_0}^{t=t} f(x,y,)g(x,y,i)\,d(x+iy),$$

die wir auch mit

(110.) $$z, \quad X^{(t)}+iY^{(t)}, \quad \overline{X}^{(t)}+i\overline{Y}^{(t)}$$

oder noch kürzer mit

(111.) $$z, \quad A(t), \quad L(t)$$

bezeichnen, bilden beziehungsweise in der Darstellungsebene drei Linien

(112.) $$\mathfrak{W}, \quad \mathfrak{A}, \quad \mathfrak{L},$$

die infolge der Voraussetzung 189 und des Satzes, daß Integrale stetige Funktionen der oberen Grenze sind, je aus einem stetig zusammenhängenden Stück bestehen; die den Werten $t_0$ und $t'$ entsprechenden Endpunkte dieser Linien kürzen wir noch besonders mittels

(113.) $$z_0, \quad X_0+iY_0, \quad \overline{X}_0+i\overline{Y}_0$$

bezw.

$$(114.)\qquad z', \quad X'+iY', \quad \overline{X}'+i\overline{Y}'$$

ab und bemerken, daß $X_0+iY_0=\overline{X}_0+i\overline{Y}_0=0$ ist.

193. Unter $x, y$ seien die reellen Veränderlichen von (107.), unter $i$ sei die imaginäre Einheit, d. h. der eine Wert von $\sqrt{-1}$ verstanden.

Die Funktion $g(x, y, i)$ *muß* nicht, *kann* aber Funktion von $x$ und $iy$ allein, oder gar von $z$ allein sein.

Die Werte von $g(x, y, i)$ und $f(x, y)$ seien den Werten von $t$ im Intervall *eindeutig* zugeordnet; dagegen sind $g$ und $f$ nicht notwendig eindeutige Funktionen des Wertepaares $x, y$, insofern zu verschiedenen Werten $t$ die nämliche Kombination $x, y$ gehören kann.

*$f(x, y)=\chi(t)$ bleibe außerdem im ganzen Intervall dem absoluten Wert nach unter einer endlichen, positiven Größe $F$ und sei eine beim Übergang der Variable $t$ von $t_0$ nach $t'$ niemals steigende, zunächst völlig positive Funktion.*

Schließlich seien die Funktionen $g$ und $f\cdot g$ bei (109.) „*im Intervall* (108.) *integrabel*" (vgl. *Pringsheims* S. 72 angeführte Arbeit, S. 218). Auf die Bedingungen ihrer Integrabilität einzugehen, scheint hier nicht nötig; zum Beweise unseres Ssatzes 194 bei 202 ff. genügt es, einige von integrablen Funktionen sicherlich erfüllte Eigenschaften zu kennen.

Unter diesen Voraussetzungen gilt:

194. *Wenn die Werte*

$$X^{(t)}+iY^{(t)} \qquad (t_0\leqq t\leqq t')$$

*zu einem Ovalgebiet $\mathfrak{E}$ der Darstellungsebene gehören, so gehört der Wert*

$$\overline{X}'+i\overline{Y}'$$

*zum Ovalgebiet*

$$\chi(t_0)\,\mathfrak{E}.$$

Den Beweis geben wir, um hier die Entwicklung der Gedanken nicht unterbrechen zu müssen, erst bei 202.

195. An die Stelle der Grenzen $A$ und $B$ des reellen Falles (104.) tritt im Satz 194 die Begrenzung $E$ von $\mathfrak{E}$, an die Stelle der Annahme, daß $A$ und $B$ speziell Minimum und Maximum des Integrals (106.) vorstellen, wird dementsprechend die Annahme zu treten haben, daß $\mathfrak{E}$ das eingeschränkteste Oval darstellt, das die Punkte $X^{(t)}+iY^{(t)}$ überhaupt noch alle enthält.

196. Dieses eingeschränkteste Oval — wir wollen es mit $\mathfrak{E}^*$, seine Begrenzung mit $E^*$ bezeichnen — ist vollkommen bestimmt. Es enthält außer den Punkten $X^{(t)} + iY^{(t)}$ der Linie $\mathfrak{A}$, welche wir als Punkte (0) bezeichnen wollen, alle die Punkte (1), (2) usw., welche durch wiederholte „Sehnenziehung“ (Ziehen geradliniger Verbindungsstrecken) aus den Punkten (0) abgeleitet werden können. Punkte (1) sind alle die Punkte auf Sehnen zwischen zwei Punkten (0), so weit sie nicht schon unter den Punkten (0) enthalten sind; Punkte (2) sind alle die Punkte auf Sehnen zwischen zwei Punkten (1) oder zwischen einem Punkt (0) und einem Punkt (1), so weit sie nicht schon unter den Punkten (0) und (1) enthalten sind usw. Es läßt sich zeigen, daß aus einer gegebenen Figur sich niemals Punkte über eine gewisse endliche Ordnung hinaus ableiten lassen, aus Figuren eines zweidimensionalen linearen Raumes z. B. sicher nicht über die zweite Ordnung hinaus.*)

*Analytische Einkleidung.*

197. Da nach 194 der Punkt $\overline{X}' + i\overline{Y}'$ zum Oval $\chi(t_0)\,\mathfrak{E}^*$ gehören muß, so wird er nach dem eben gesagten aus den Punkten

$$\chi(t_0)\,(X^{(t)} + iY^{(t)}), \qquad (t_0 \leqq t \leqq t') \tag{115.}$$

spätestens als Punkt zweiter Ordnung ableitbar sein. Ein Punkt erster Ordnung ist aber seiner Definition zufolge in unserem Falle stets darstellbar in der Form

$$\chi(t_0)\Big[\alpha_1 \int\limits_{t=t_0}^{t=\tau_1} g\,dz + \alpha_2 \int\limits_{t=t_0}^{t=\tau_2} g\,dz\Big], \tag{116.}$$
$$(\alpha_1,\ \alpha_2 > 0;\ \alpha_1 + \alpha_2 = 1;\ t_0 \leqq \tau_1,\ \tau_2 \leqq t'),$$

ein Punkt zweiter Ordnung entweder in der Form

$$\chi(t_0)\Big[\alpha_1 \int\limits_{t=t_0}^{t=\tau_1} g\,dz + \alpha_2 \int\limits_{t=t_0}^{t=\tau_2} g\,dz + \alpha_3 \int\limits_{t=t_0}^{t=\tau_3} g\,dz\Big], \tag{117.}$$
$$(\alpha_1,\ \alpha_2,\ \alpha_3 > 0,\ \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = 1,\ t_0 \leqq \tau_1,\ \tau_2,\ \tau_3 \leqq t'),$$

oder in der Form

*) Vgl. des Verfassers Aufsatz: „Über das durch eine beliebige endliche Figur bestimmte Eigebilde“. Boltzmannfestschrift 1904, S. 94 u. ff.

$$(118.)\quad \chi(t_0)\Big[\alpha_1 \int_{t=t_0}^{t=\tau_1} g\,dz + \alpha_2 \int_{t=t_0}^{t=\tau_2} g\,dz + \alpha_3 \int_{t=t_0}^{t=\tau_3} g\,dz + \alpha_4 \int_{t=t_0}^{t=\tau_4} g\,dz\Big].$$

$$(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4 > 0,\ \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4 = 1,\ t_0 \leqq \tau_1, \tau_2, \tau_3, \tau_4 \leqq t').$$

198. Wir brauchen indes — bei genauerem Zusehen — niemals vier Integrale zur Darstellung unseres Punktes zweiter Ordnung, sondern können, wenn wir wollen, immer mit dreien auskommen. Man denke sich von einem beliebig gewählten Punkte

$$\int_{t=t_0}^{t=\tau_1} g\,dz, \quad t_0 \leqq \tau_1 \leqq t'$$

aus die gerade Strecke nach $\overline{X}' + i\overline{Y}'$ gezogen, und nenne ihre Verlängerung über $\overline{X}' + i\overline{Y}'$ hinaus $V$. Wenn auf $V$ ein Punkt $e^*$ erster oder nullter Ordnung liegt, so ist offenbar $\overline{X}' + i\overline{Y}'$ durch weniger als vier Integrale darstellbar. Ein solcher Punkt $e^*$ ist aber, wenn $\overline{X}' + i\overline{Y}'$ nicht auf der Begrenzung von $\chi(t_0)\mathfrak{E}^*$ liegt, immer vorhanden in dem Schnittpunkt dieser Begrenzung mit $V$. Denn auf der Begrenzung $\chi(t_0)E^*$ können nur Punkte (0) und (1) liegen, wie man leicht zeigt (vgl. 227). Liegt aber $\overline{X}' + i\overline{Y}'$ auf dieser Begrenzung, so ist es selbst ein Punkt 0 oder (1); somit ist dieser Punkt, wie behauptet wurde, immer durch weniger als vier Integrale darstellbar:

$$(119.)\quad \int_{t=t_0}^{t=t'} f\cdot g\,dz = \chi(t_0)\Big[\alpha_1 \int_{t=t_0}^{t=\tau_1} g\,dz + \alpha_2 \int_{t=t_0}^{t=\tau_2} g\,dz + \alpha_3 \int_{t=t_0}^{t=\tau_3} g\,dz\Big],$$

$$(0 \leqq \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \leqq 1;\ \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = 1;\ t_0 \leqq \tau_1, \tau_2, \tau_3 \leqq t'),$$

wobei $\tau_1$ willkürlich gewählt werden kann im Intervall $t_0$ bis $t'$, und auch $\tau_2$ und $\tau_3$ im Allgemeinen noch Spielraum haben, da man den Hilfspunkt $e^*$ gewöhnlich nicht auf der Begrenzung von $\chi(t_0)\mathfrak{E}^*$ zu wählen braucht.

199. Ja in unserem Falle ist sogar infolge des besonderen Umstandes, daß die Punkte (0) *eine stetig zusammenhängende Reihe* bilden, die Darstellung von $\overline{X}' + i\overline{Y}'$ stets schon durch *zwei* Punkte $\chi(t_0)(X^{(t)} + iY^{(t)})$ möglich:

$$(120.)\quad \int_{t=t_0}^{t=t'} f\cdot g\cdot dz = \chi(t_0)\Big[\alpha_1 \int_{t=t_0}^{t=\tau_1} g\cdot dz + \alpha_2 \int_{t=t_0}^{t=\tau_2} g\cdot dz\Big],$$

$$(0 \leqq \alpha_1, \alpha_2 \leqq 1,\ \alpha_1 + \alpha_2 = 1,\ t_0 \leqq \tau_1, \tau_2 \leqq t').$$

Es läßt sich nämlich zeigen, daß aus einer stetig zusammenhängenden

Reihe von Punkten (0) *in der Ebene* sich überhaupt höchstens Punkte (1) ableiten lassen, vgl. 231.

200. Der weitere besondere Umstand, daß unter den Punkten

$$\chi(t_0)\,(X^{(t)}+i\,Y^{(t)})$$

sich der Punkt Null befindet — er entsteht, wenn die obere Grenze $t=t_0$ gesetzt wird —, läßt die Darstellung von $\overline{X}'+i\overline{Y}'$ durch nur *zwei* Punkte $\chi(t_0)(X^{(t)}+i\,Y^{(t)})$ auch noch in anderer Weise möglich erscheinen. Man braucht nur in der Darstellung (119.) die willkürliche obere Grenze $\tau_1$ gleich $t_0$ zu setzen, so erhält man:

$$\int\limits_{t=t_0}^{t=t'} f\cdot g\cdot dz=\chi(t_0)\Big[\alpha_2\int\limits_{t=t_0}^{t=\tau_2} g\cdot dz+\alpha_3\int\limits_{t=t_0}^{t=\tau_3} g\,d\,z\Big],$$

wofür man natürlich auch schreiben kann:

$$(121.)\qquad \int\limits_{t=t_0}^{t=t'} f\cdot g\cdot dz=\chi(t_0)\Big[\alpha_1\int\limits_{t=t_0}^{t=\tau_1} g\cdot dz+\alpha_2\int\limits_{t=t_0}^{t=\tau_2} g\,d\,z\Big],$$
$$(0\leqq\alpha_1,\,\alpha_2\leqq 1,\;\; 0<\alpha_1+\alpha_2\leqq 1,\;\; t_0\leqq\tau_1,\,\tau_2\leqq t')$$

eine Darstellung, die für jeden Punkt von $\chi(t_0)\,\mathfrak{E}^*$ gilt, der nicht mit dem Punkte Null identisch ist.*)

201. Dagegen ist es *nicht* durchweg möglich, aus der zweigliedrigen Darstellung bei (120.) durch Verwendung des Nullpunktes eine eingliedrige zu machen. Nur wenn die Reihe der Punkte $X^{(t)}+i\,Y^{(t)}$ ein Oval oder einen Ovalbogen bildet, gelingt dies *sicher* und man erhält eine Darstellung:

$$(122.)\qquad \int\limits_{t=t_0}^{t=t'} f\cdot g\cdot dz=\chi(t_0)\,\alpha\int\limits_{t=t_0}^{t=\tau} g\cdot dz,\qquad (0<\alpha\leqq 1)$$

für jeden Punkt von $\chi(t_0)\,\mathfrak{E}$,*) der nicht mit dem Nullpunkt identisch ist. Sowie aber die Kurve der $X^{(t)}+i\,Y^{(t)}$ ihre Konkavität nicht überall nach der nämlichen Seite wendet, kann $\overline{X}'+i\overline{Y}'$ so liegen, daß auf $V$ (vgl. 198.) kein Punkt (0) sich befindet, vgl. die nebenstehende Figur.

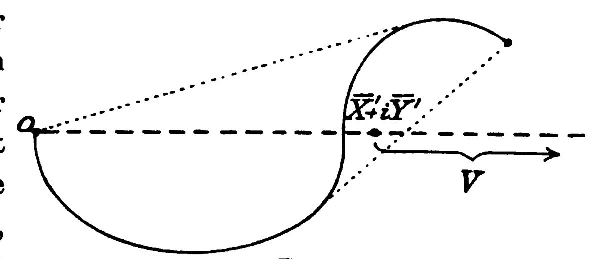


Fig. 6.

*) Man vgl. übrigens in der Boltzmannfestschrift die Bemerkung im dritten Absatz von Seite 102.

### Beweis des Satzes 194.

202. Für den Beweis des Satzes 194 entnehmen wir wesentliche Stücke in Anlage und Ausführung dem Beweise, den Herr *A. Pringsheim* in seiner Arbeit „Über den sogenannten zweiten Mittelwertsatz für endliche Summen und Integrale“ für den Fall einer reellen Veränderlichen gegeben hat.*)

Wir zerlegen unser Integrationsintervall, indem wir Werte

$$(123.)\qquad t_\nu \qquad (\nu=1,2,3\dots n-1)$$

zwischen $t_0$ und $t' \equiv t_n$ einschieben. Völliger Bestimmtheit zu Liebe werde von den zwei Endwerten $t_\nu$, $t_{\nu+1}$ eines Teilintervalles immer nur der zweite, $t_{\nu+1}$, zum Intervall gerechnet, ausgenommen beim ersten Intervall $t_0\, t_1$, dem *beide* Endwerte zugerechnet werden.

203. Eine Funktion

$$(124.)\qquad \omega_n(t),$$

oder auch abgekürzt

$$(125.)\qquad \omega,$$

bei welcher der Index $n$ ausdrücken möge, daß sie mit der durch die $t_\nu$ bewirkten Einteilung sich ändert, sei gleich $+1$ in allen Teilintervallen, in denen der absolute Betrag vorkommender Änderungen von $g$ eine gegebene positive Größe $\sigma$ erreicht oder überschreitet, sei in den übrigen Teilintervallen durchweg Null.

204. Dann wird infolge der Integrabilität von $g$ angenommen werden dürfen, daß für ein wie klein auch immer gegebenes $\varepsilon''$ durch passende Einteilung des Intervalles die zwei auf der nächsten Seite angegebenen Ungleichungen (126.) und (127.) erfüllt sind.

Auf die Wichtigkeit dieser beiden Gleichungen für den Beweis des reellen *Weierstraß-Du Bois-Reymond*schen Mittelwertsatzes der bestimmten Integrale hat, soviel mir bekannt ist, zuerst Herr *A. Pringsheim* aufmerksam gemacht und ihre Aufstellung und Anwendung bildet einen nicht unwichtigen Teil seiner an den früher bekannten Beweisen angebrachten Verbesserung.

---

*) Münch. Sitz.-Ber., math.-phys. Kl. 1900, Bd. XXX, S. 220 u. ff.

$$(126.)\qquad \left|\int_{t=t_0}^{t=t_\lambda} \omega\cdot g\cdot dz\right| < \varepsilon''$$

$$(127.)\qquad \left|\int_{t=t_0}^{t=t_\lambda} \omega\cdot f\cdot g\cdot dz\right| < \varepsilon'' \qquad (\lambda = 1, 2, 3 \ldots n)$$

(Vgl. bei Herrn *Pringsheim* a. a. O. die Ungleichungen (20.) a) und b).)

205. In jene Intervalle, wo $\omega = 1$ ist, fallen natürlich auch sämtliche Unendlichkeitsstellen von $|g|$, sowie die Stellen, denen sich annähernd $|g|$ über jede endliche Größe hinaus wächst, ohne doch unendlich zu werden.

206. Wir setzen nun analog wie bei Herrn *Pringsheim*:

$$(128.)\left\{\begin{aligned} \int_{t=t_0}^{t=t_n} f\cdot g\cdot dz &= \sum_1^n{}_\nu f_\nu \int_{t=t_{\nu-1}}^{t=t_\nu} g\cdot dz \\ &\quad + \Big(\int_{t=t_0}^{t=t_n} f\cdot g\cdot dz - \sum_1^n{}_\nu f_\nu \int_{t=t_{\nu-1}}^{t=t_\nu} g\cdot dz\Big) \\ &= J_n + R_n \end{aligned}\right.$$

und gehen auf den Beweis von

$$(129.)\qquad \lim_{\substack{(n=\infty \\ \Delta t_\nu = 0)}} R_n = 0$$

aus.

207. Diesen Beweis, der bei Herrn *Pringsheim* in zwei Anläufen erfolgt, versuchen wir in *einem* Anlauf zu vollführen mit Hilfe gewisser identischer Umformungen der Integrale im Ausdruck $R_n$. Zur Verdeutlichung verbinden wir mehrfach solche Glieder in den folgenden Gleichungen (132.), welche auseinander entstehen, durch Striche.

Wir wollen abkürzend

$$(130.)\qquad \omega g \equiv \dot{g},\quad (1-\omega)g \equiv \bar{g}$$

setzen, dann sind unter Beachtung von

$$(131.)\qquad \dot{g} + \bar{g} = g,\quad f\cdot\dot{g} + f\cdot\bar{g} = fg$$

die folgenden Identitäten (132.) einleuchtend:*)

*) Die Integralgrenzen beziehen sich alle auf die Variable $t$; $f_\nu, \bar{g}_\nu, z_\nu$ sind die dem $t_\nu$ entsprechenden Werte von $f, \bar{g}, z$ und $\Delta_\nu z$ ist die Differenz $z_\nu - z_{\nu-1}$.

$$
\begin{aligned}
R_n &= \int_{t_0}^{t_n} f\cdot g\cdot dz - \sum_1^n{}_\nu f_\nu \int_{t_{\nu-1}}^{t_\nu} g\cdot dz \\
&= \int_{t_0}^{t_n} f\cdot \bar{g}\cdot dz + \int_{t_0}^{t_n} f\cdot \dot{g}\cdot dz - \Sigma f_\nu \int_{t_{\nu-1}}^{t_\nu} \bar{g}\cdot dz - \Sigma f_\nu \int_{t_{\nu-1}}^{t_\nu} \dot{g}\cdot dz \\
&= \int_{t_0}^{t_n} f\cdot \bar{g}\cdot dz - \Sigma f_\nu \bar{g}_\nu \Delta_\nu z - \Sigma f_\nu \int_{t_{\nu-1}}^{t_\nu} (\bar{g}-\bar{g}_\nu) dz - \Sigma f_\nu \int_{t_{\nu-1}}^{t_\nu} \dot{g}\cdot dz + \int_{t_0}^{t_n} f\cdot \dot{g} dz \\
&= \qquad \varepsilon_1 \qquad - \qquad \varepsilon_2 \qquad - \qquad \varepsilon_3 \qquad + \qquad \varepsilon_4
\end{aligned}
$$

208. Nun sind aber $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \varepsilon_4$ lauter Größen, die bei genügender Vermehrung und Verengerung der Intervalle des Integrationsweges ihrem absoluten Werte nach unter eine beliebig kleine positive Größe $\varepsilon$ herabsinken, und zwar tut dies:

$\varepsilon_4$ infolge der Ungleichung (127.);

$\varepsilon_3$ infolge unseres Lemmas 5—6, da die $f_\nu$ eine positive monotone nicht steigende Reihe bilden und die Ungleichungen (126.) gelten;

$\varepsilon_2$ ebenfalls infolge des Lemmas 5—6. Denn die $f_\nu$ bilden eine positive monotone nicht steigende Reihe und es ist

$$(133.)\qquad \left| \sum_1^\lambda{}_\nu \int_{t_{\nu-1}}^{t_\nu} (\bar{g}-\bar{g}_\nu) dz \right| \leqq \sum_1^\lambda{}_\nu \int_{t_{\nu-1}}^{t_\nu} |\bar{g}-\bar{g}_\nu|\cdot|dz| \leqq \sigma \int_{t_0}^{t_\lambda} |dz|.$$

Das letzte Integral hat nach der bei 190 gemachten Annahme endlichen Wert:

$$(134.)\qquad \int_{t_0}^{t_\lambda} |dz| < G.$$

Da $G$ endlich und bestimmt ist, $\sigma$ aber in unserer Willkür liegt (vgl. 203), so werden die Werte

$$(135.)\qquad \sigma \int_{t_0}^{t_\lambda} |dz| \qquad\qquad (\lambda = 1, 2, 3 \ldots n)$$

durch passende Verfügung über $\sigma$ sämtlich beliebig klein.

$\varepsilon_1$ infolge der Definition des Integrals $\int\limits_{t_0}^{t_n} f \cdot \bar{g} \cdot dz$, wobei etwaige Sprungstellen keinen Schaden tun, wie aus folgenden Überlegungen ersichtlich ist:

209. Es kann, wie auch die Teilung gemacht sei, infolge der Monotonie von $f$ auf dem Integrationswege nicht mehr als eine leicht angebbare endliche Anzahl $N$ von Teilintervallen unseres Hauptintervalles geben, für welche

$$(136.) \qquad |\varDelta_\nu f| \geqq \delta,$$

($\delta$ beliebig klein gegebene positive Größe).

Unter den Teilintervallen, in welchen $\omega$ gleich Null, $1-\omega$ gleich der Einheit ist, befinden sich eo fortiori nicht mehr als $N$, sagen wir $N'(\leqq N)$ verschiedene Intervalle, für welche die Beziehung (136.) gilt.

210. Wir wollen mit $\varpi$ eine Funktion von $t$ bezeichnen, die in den eben gekennzeichneten $N'$ Intervallen konstant gleich 1, im übrigen überall gleich 0 ist,*) und wollen die Teilung an den Stellen des Integrationsweges, wo $\omega$ gleich 0 ist, bereits so eng gemacht denken, daß

$$(137.) \qquad \int\limits_{t_0}^{t_n} \varpi |dz| < \beta$$

($\beta$ beliebig klein gegebene positive Größe).

Man sieht, daß $\beta$ verkleinert werden kann, ganz unabhängig von $\varepsilon''$, welches nur von der Größe der Intervalle abhängt, in denen $\omega$ gleich 1 ist, ein Umstand, der bei 212 wichtig wird.

211. Zur Abkürzung sei

$$(138.) \qquad \varpi \cdot f = \dot{f}, \qquad (1-\varpi) f = \bar{f}$$

gesetzt. Dann ist

$$(139.) \qquad \int\limits_{t_0}^{t_n} f \cdot \bar{g} \cdot dz - \sum_1^n{}_\nu f_\nu \bar{g}_\nu \varDelta_\nu z = \int\limits_{t_0}^{t_n} \bar{f}\,\bar{g}\,dz - \sum_1^n{}_\nu \bar{f}_\nu \cdot \bar{g}_\nu \cdot \varDelta_\nu z$$

$$+ \int\limits_{t_0}^{t_n} \dot{f}\,\bar{g}\,dz - \sum_1^n{}_\nu \dot{f}\,\bar{g}_\nu \varDelta_\nu z.$$

*) $\varpi$ ist also z. B. an den Stellen, wo $\omega$ gleich 1 ist, sicher gleich 0.

Man beachte nun, daß $|\bar{g}|$ unterhalb einer positiven Größe $\bar{G}$ bleibt, die zwar mit der Abnahme von $\varepsilon''$ möglicherweise über alles Maß wächst, für ein bestimmtes $\varepsilon''$ aber stets endlich bleibt. Denn jedem unserer Intervalle muß doch sicher *ein* angebbarer endlicher Wert $W$ von $|g|$ angehören — im entgegengesetzten Falle wären alle $|g|$ für das Intervall unendlich oder unbestimmt und $g$ nicht integrabel —, dann sind aber nach 203 sämtliche Werte $|g|$ im Intervall kleiner als $W+\sigma$, und $\bar{G}$ kann gleich dem größten dieser zu den verschiedenen Teilintervallen gehörigen Werte $W+\sigma$ gesetzt werden. Desgleichen bleibt $|f|$ nach der bei 193 gemachten Voraussetzung unter einer endlichen positiven Größe $F$. Es wird also der absolute Betrag der ersten Differenz auf der rechten Seite von (139.)

$$(140.)\quad \begin{cases} \left|\int\limits_{t_0}^{t_n} \bar{f}\cdot\bar{g}\cdot dz - \sum\limits_1^n{}_\nu \bar{f}_\nu\cdot\bar{g}_\nu \Delta_\nu z\right| = \left|\sum\limits_1^n{}_\nu \int\limits_{\nu-1}^{\nu} (\bar{f}\cdot\bar{g}-\bar{f}_\nu\cdot\bar{g}_\nu)\, dz\right| \\ \leqq \sum\limits_1^n{}_\nu \int\limits_{\nu-1}^{\nu} |\bar{f}\bar{g}-\bar{f}_\nu\cdot\bar{g}_\nu|\cdot|dz| \leqq \sum\limits_1^n{}_\nu \int\limits_{\nu-1}^{\nu} (|\bar{f}_\nu|\sigma+|\bar{g}_\nu|\delta+\delta\sigma)\,|dz| \\ \qquad \leqq (F\sigma+\bar{G}\delta+\delta\sigma)\int\limits_{t_0}^{t_n}(1-\bar{\omega})\,|dz| \\ \qquad \leqq (F\sigma+\bar{G}\delta+\delta\sigma)\cdot G, \qquad\qquad \text{(vgl. 190)} \end{cases}$$

d. h. beliebig klein, denn eine Gefahr, daß $\bar{G}\delta$ nicht beliebig klein gemacht werden könnte, weil bei Verkleinerung von $\delta$ das $\bar{G}$ in untaxierbarer Weise wüchse, ist nicht vorhanden. Vielmehr kann, nachdem $\varepsilon''$ und danach $\bar{G}$ irgendwie festgestellt sind, $\delta$ ganz unabhängig davon beliebig klein angenommen werden.

212. Ferner gilt für die zwei letzten Glieder der rechten Seite von (139.)

$$(141.)\qquad \left|\int\limits_{t_0}^{t_n} \dot{f}\cdot\bar{g}\cdot dz\right| \leqq F\bar{G}\int\limits_{t_0}^{t_n} \bar{\omega}\,|dz| < F\bar{G}\beta;$$

$$(142.)\qquad \left|\sum\limits_1^n{}_\nu \dot{f}\cdot\bar{g}_\nu \Delta z\right| \leqq F\bar{G}\int\limits_{t_0}^{t_n} \bar{\omega}\,|dz| < F\bar{G}\beta;$$

d. h. sie werden auch beliebig klein, und die hier nötig werdende Verkleinerung von $\beta$ wirkt nicht etwa zurück auf $\bar{G}$ oben, sondern ist von $\bar{G}$ nach 210 völlig unabhängig.

Somit ist nun wohl jedes Bedenken beseitigt, daß die linke Seite von (139.), d. h. unser $\varepsilon_1$, nicht unendlich klein gemacht werden könnte.

213. $R_n$ wird also bei Verengerung der Teilung unendlich klein, Gleichung (129.) ist bewiesen. $J_n$ ist aber für beliebiges $n$, besser gesagt, für beliebige Teilung ein Punkt von $\mathfrak{E}$, da das Summenlemma 26 sich auf $\mathfrak{J}_n$ anwenden läßt. Infolge der Abgeschlossenheit von $\mathfrak{E}$ wird daher auch

$$\lim_{\substack{n=\infty \\ (\Delta t_\nu = 0)}} J_n$$

und

$$\int_{t=t_0}^{t=t_n} f \cdot g \cdot dz = \lim J_n + \lim R_n = \lim J_n$$

ein Punkt von $\mathfrak{E}$ sein. q. e. d.

## Zweite Form der Verallgemeinerung.

214. Man wünscht nun, auch die zweite Form des *Bonnet*schen Satzes bei (105.) verallgemeinert und den Punkt $\overline{X}' + i\overline{Y}'$ durch ein einziges Integral über $g(x, y, i)$ dargestellt zu sehen, in dessen obere Grenze irgend ein Mittelwert eingeht.

Die Darstellung

$$(143.) \quad \int_{t=t_0}^{t=t'} f(x, y)\, g(x, y, i)\, dz = \chi(t_0) \int_{t=t_0}^{t=\tau} g(x, y, i)\, dz; \qquad (t_0 \leqq \tau \leqq t')$$

ist aber im Allgemeinen nicht möglich, da ein Punkt $\overline{X}' + i\overline{Y}'$ von $\chi(t_0)\,\mathfrak{E}^*$ nicht notwendig zu der Reihe der Punkte $\chi(t_0)\,(X^{(t)} + iY^{(t)})$ gehören muß, sondern $\chi(t_0)\,\mathfrak{E}^*$ im Allgemeinen eine Mannigfaltigkeit zweiter Stufe von Punkten enthält, im Gegensatz zum reellen Falle, wo die Werte, die das Integral

$$\int_a^b f(x)\, g(x)\, dx$$

annehmen kann, völlig bedeckt wurden von den Werten der Funktion

$$f(a) \int_a^\xi g(x)\, dx.$$

Man sieht, daß wir höchstens eine Darstellung erwarten können von der Art

$$(144.)\quad \int_{x_0, y_0}^{x', y'} f(x, y)\, g(x, y, i)\, dz = f(x_0, y_0) \int_{x_0, y_0}^{\xi, \eta} g(x, y, i)\, dz,$$

wo links und rechts im Allgemeinen über verschiedene Wege integriert wird, links etwa von $t_0$ bis $t'$, während

$$x = \varphi(t), \quad y = \psi(t)$$

ist, rechts etwa von $s_0$ bis $s'$, während

$$x = \theta(s), \quad y = \omega(s)$$

ist.

215. *Somit müssen jetzt, was bisher nicht nötig war anzunehmen,* $g(x, y, i)$ *und* $\int g(x, y, i)\, dz$ *auch für andere als die Werte*

$$(145.)\quad z = \varphi(t) + i\psi(t) \qquad (t_0 \leqq t \leqq t')$$

*definiert sein, nämlich für ein ganzes zusammenhängendes Gebiet*

$$(146.)\quad [z] \equiv [x + iy]$$

*der Darstellungsebene, welches*

1. *die Punkte* (145.) *enthält;*
2. *zu jedem Punkte* $X + iY$ *des Ovals* $\mathfrak{E}^*$ *oder eines noch umfassenderen* $\mathfrak{E}$ *mindestens einen von* $x_0 + iy_0$ *ausgehenden, in einem Punkte* $\xi + i\eta$ *endigenden Weg* $\mathfrak{W}$ *völlig in sich enthält, über den integriert*

$$(147.)\quad \int_{(\mathfrak{W})} g(x, y, i)\, dz = X + iY$$

*wird.*

*Dann ist aber auch die Darstellung* (144.) *vermittelst eines dem Gebiete* $[z]$ *entnommenen Wertes* $\xi + i\eta$ *immer möglich.*

Der nächste Satz, aus dem vorigen folgend, ist zwar eingeschränkter, aber seine Vorbedingungen schließen sich zu einem besseren Bilde zusammen:

216. *Die Funktion*

$$(148.)\quad Z = \int_{z_0}^{z} g(z)\, dz, \quad (z_0 = x_0 + iy_0 \textit{ konstant})$$

*sei in einem zusammenhängenden Gebiete* $[z]$ *eindeutig und vom Integrationswege unabhängig, das entsprechende Gebiet* $[Z]$ *sei ein Ovalgebiet. Dann gibt es*

*zu einem innerhalb oder auf der Grenze von $[z]$ verlaufenden Integrationswege $\mathfrak{W}$ mit Anfangspunkt $z_0$ und Endpunkt $z'$ sicher einen ebenfalls in $[z]$ liegenden Punkt $z=\zeta$, der die Gleichung*

$$(149.)\qquad \int_{\substack{z_0\\(W)}}^{z'} f(x,y)\,g(z)\,dz = f(x_0,y_0)\int_{z_0}^{\zeta} g(z)\,dz$$

*erfüllt, wenn $f(x,y)$ eine auf dem Wege $\mathfrak{W}$ reelle positive, nirgends zunehmende endliche Funktion ist.*

$f(x,y)$ **reell und monoton auf dem Integrationswege.**

217. Wir haben jetzt Verallgemeinerungen vor, welche den bei 71—137 und 174—183 gegebenen analog sind. Man beweist durch genau dieselbe Methode, wie sie dort angewandt wurde, den Satz:

*Wenn die Punkte der Linie $\mathfrak{A}$* (vgl. (112.))

$$(150.)\qquad X^{(t)}+iY^{(t)} \equiv \int_{t=t_0}^{t=t'} g(x,y,i)\,dz \qquad \left(\begin{smallmatrix} x=\varphi(t);\; y=\psi(t)\\ t_0 \leqq t \leqq t'\end{smallmatrix}\right)$$

*zu einem Ovalgebiet $\mathfrak{E}$ der Darstellungsebene gehören, so gehört der Punkt*

$$(151.)\qquad \overline{X'}+i\overline{Y'} \equiv \int_{t=t_0}^{t=t'} f(x,y)\,g(x,y,i)\,dz,$$

*wo*

$$f(x,y)=\chi(t)$$

*eine auf dem Integrationswege monoton verlaufende Funktion bedeutet, zu dem Ovalgebiet*

$$(152.)\qquad (\chi(t_0)-\chi(t'))\mathfrak{E} \dotplus \chi(t')\mathfrak{E}.$$

218. Wir bezeichnen mit $\mathfrak{E}^*(\mathfrak{F})$ das durch eine ebene Figur $\mathfrak{F}$ bestimmte (beschränkteste $\mathfrak{F}$ enthaltende) Oval und setzen hier an Stelle von $\mathfrak{F}$ speziell die Linie $\mathfrak{A}$. Dann gehört nach dem vorigen Satze der Punkt $\overline{X'}+i\overline{Y'}$ auch zu dem Ovalgebiet

$$(153.)\qquad (\chi(t_0)-\chi(t'))\mathfrak{E}^*(\mathfrak{A}) \dotplus \chi(t')\mathfrak{E}^*(\mathfrak{A}).$$

Dieses ist aber nach einem Hilfssatz, der bei 223 bewiesen wird, identisch mit dem Oval

$$(154.)\qquad \mathfrak{E}^*((\chi(t_0)-\chi(t'))\mathfrak{A} \dotplus \chi(t')\mathfrak{A}).$$

Da die Linie $\mathfrak{A}$ ein einziges zusammenhängendes Stück bildet (vgl. (112.)), so wird auch die Punktsummenfigur

$$(\chi(t_0)-\chi(t'))\,\mathfrak{A} \dotplus \chi(t')\,\mathfrak{A} \tag{155.}$$

dies tun. Somit ist nach dem weitern Hilfssatze der bei 231 bewiesen wird, jeder Punkt des Ovalgebietes (154.) als Punkt spätestens erster Ordnung (vgl. 196) aus der Figur (155.) ableitbar, d. h. er ist ein Punkt

$$\alpha A+\beta B \qquad (\alpha+\beta=1,\ 0 \leqq \alpha,\ \beta \leqq 1) \tag{156.}$$

der Verbindungsstrecke zweier zu (155.) gehörigen Punkte $A, B$. Aber es ist weiter, gemäß der Definition 73. des Punktsummengebietes (155.)

$$\begin{aligned} A&=(\chi(t_0)-\chi(t'))(X^{(t_1)}+i\,Y^{(t_1)})+\chi(t')(X^{(t_2)}+i\,Y^{(t_2)})\\ B&=(\chi(t_0)-\chi(t'))(X^{(t_3)}+i\,Y^{(t_3)})+\chi(t')(X^{(t_4)}+i\,Y^{(t_4)}), \end{aligned} \tag{157.}$$

wenn

$$X^{(t_1)}+i\,Y^{(t_1)},\ X^{(t_2)}+i\,Y^{(t_2)},\ X^{(t_3)}+i\,Y^{(t_3)},\ X^{(t_4)}+i\,Y^{(t_4)}$$

vier passend ausgewählte Punkte von $\mathfrak{A}$ sind.

219. *Es ergibt sich also schließlich*

$$\begin{aligned} \overline{X}'+i\,\overline{Y}' &= \alpha A+\beta B\\ &=(\chi(t')-\chi(t'))\Big(\alpha\int_{t=t_0}^{t=t_1} g(x,y,i)\,dz+\beta\int_{t=t_0}^{t=t_3} g(x,y,i)\,dz\Big)\\ &\quad+\chi(t')\Big(\alpha\int_{t=t_0}^{t=t_2} g(x,y,i)\,dz+\beta\int_{t=t_0}^{t=t_4} g(x,y,i)\,dz\Big)\\ &\quad\left(\begin{matrix}\alpha+\beta=1,\ 0\leqq\alpha,\ \beta\leqq 1,\\ t_0\leqq t_1,\,t_2,\,t_3,\,t_4\leqq t'.\end{matrix}\right) \end{aligned}$$

Auf weitere Umformungen lassen wir uns nicht ein.

## AN DIE WEIERSTRASS-DU BOIS-REYMONDSCHE FORM ANKNÜPFEND.

220. Es erhebt sich nun die Frage, ob auch diejenige Form des zweiten Mittelwertsatzes der bestimmten Integrale, welche von *Weierstraß* und *Du Bois-Reymond* gegeben wurde, auf unsere verallgemeinerten Voraussetzungen übertragbar ist, und wenn ja, wie sie sich zu den bisherigen Er-

gebnissen verhält. Wir erledigen beide Fragen mit einem Schlage, indem wir zeigen, daß die *Weierstraß-Du Bois-Reymond*sche Form — abgesehen davon, daß ihre Anwendbarkeit von etwas mehr Voraussetzungen abhängt — das nämliche aussagt, wie der Satz 217 des vorigen Kapitels, welchen man etwa als „Ausdehnung der geometrischen Fassung des für komplexes Gebiet formulierten *Bonnet*schen Satzes auf *monotone* $\chi(t)$ bezeichnen kann.

221. Man wird natürlich wieder die etwas zahlreicheren Voraussetzungen wie bei 215 als erfüllt ansehen müssen. Wir werden sogar etwas weiter gehen und alles wie bei 216 annehmen, da nur dann der resultierende Satz einiges Interesse zu haben scheint. Die *Weierstraß-Du Bois-Reymond*sche Form muß, der Analogie nach, die folgende sein:

$$(158.)\quad \int_{z_0}^{z'} f(x,y)\,g(z)\,dz = f(x_0 y_0)\int_{z_0}^{\zeta} g(z)\,dz + f(x'y')\int_{\zeta}^{z'} g(z)\,dz.$$

Hierbei bedeutet $\zeta$ einen Wert des Gebietes $[z]$, welches dem Ovalgebiet $[Z] \equiv \mathfrak{E}$ entspricht. Geometrisch gedeutet ist nun:

$$\int_{z_0}^{z'} g(z)dz \text{ irgend ein Punkt } J' \text{ des Ovalgebietes } \mathfrak{E},$$

$$\int_{z_0}^{\zeta} g(z)dz \text{ irgend ein Punkt } J \text{ des Ovalgebietes } \mathfrak{E},$$

$$\int_{\zeta}^{z'} g(z)dz = \int_{z_0}^{z'} g(z)dz - \int_{z_0}^{\zeta} g(z)dz \text{ die Differenz } J'-J \text{ zweier Punkte von } \mathfrak{E},$$

$$f(x_0 y_0)\int_{z_0}^{\zeta} g(z)dz + f(x',y')\int_{\zeta}^{z'} g(z)dz \text{ ein Punkt} \begin{cases} f(x_0,y_0)J + f(x',y')(J'-J) \text{ oder} \\ [f(x_0,y_0)-f(x',y')]J + f(x'y')J'. \end{cases}$$

Es ist aber

$$[f(x_0,y_0)-f(x',y')]J \text{ ein Punkt des Ovalgebiets } [f(x_0,y_0)-f(x',y')]\mathfrak{E},$$
$$f(x',y')J' \text{ ein Punkt des Ovalgebietes } f(x',y')\mathfrak{E};$$

also ist zufolge (158.)

$$\int_{z_0}^{z'} f(x,y)\,g(z)\,dz \text{ ein Punkt des Ovalgebietes } [f(x_0,y_0)-f(x'y')]\mathfrak{E} \dotplus f(x',y')\mathfrak{E},$$

genau wie Satz 217 behauptet. Auch umgekehrt läßt sich, indem man obige Ableitung rückwärts verfolgt, dartun:

Irgend ein Punkt des Ovalgebietes $[f(x_0, y_0) - f(x', y')]\mathfrak{E} \dotplus f(x', y')\mathfrak{E}$ läßt sich immer in der Form

$$f(x_0, y_0) \int_{z_0}^{\zeta} g(z)\,dz + f(x', y') \int_{\zeta}^{z'} g(z)\,dz$$

darstellen, sobald die bei 216 gemachten Voraussetzungen erfüllt sind.

222. *Hiermit ist die bei* 220 *behauptete Übereinstimmung gesichert und der verallgemeinerte Weierstraß–Du Bois-Reymondsche Satz* (158.) *unter den bei* 216 *gemachten Voraussetzungen bewiesen.*

## Nachträglicher Beweis einiger Hilfssätze.

223. *Es ist:*

$$\mathfrak{E}^*(\alpha\mathfrak{F} \dotplus \beta\mathfrak{F}) \equiv \alpha\,\mathfrak{E}^*(\mathfrak{F}) \dotplus \beta\,\mathfrak{E}^*(\mathfrak{F})$$

*abgekürzt*

$$\mathfrak{E}_1 \equiv \mathfrak{E}_2.$$

*Hierbei bezeichnet* $\mathfrak{E}^*(\mathfrak{F})$ *das durch eine beliebige Figur* $\mathfrak{F}$ *„bestimmte“ Eigebiet, $\alpha$ und $\beta$ sind zwei reelle Faktoren.*

224. Die beiden Eigebiete werden identisch sein, wenn ihre Begrenzungen es sind, diese, wenn ihre einander entsprechenden Stützlineare es sind. „Entsprechend“ heißt hier: parallel und nach der nämlichen Seite gelegen, „entgegengesetzt“ parallel und nach der entgegengesetzten Seite gelegen.

225. Ganz allgemein ist nun ein Stützlinear von $\mathfrak{F}$ identisch mit dem entsprechenden von $\mathfrak{E}^*(\mathfrak{F})$, vgl. *Boltzmann*-Festschrift, S. 103/4.

226. Somit ist auch ein Stützlinear von $\mathfrak{E}_1$ identisch mit dem entsprechenden des Punktsummengebietes

$$\alpha\mathfrak{F} \dotplus \beta\mathfrak{F},$$

dieses aber bildet sich aus dem entsprechenden Stützlinear $S_{(1)}$ und dem entgegengesetzten $S_{(-1)}$ von $\mathfrak{F}$ wie folgt:

$$\alpha S_{(\operatorname{sgn} \alpha)} \dotplus \beta S_{(\operatorname{sgn} \beta)}.\text{*)} \tag{159.}$$

---

*) sgn $\alpha$ bedeutet $+1$, $-1$ oder 0, jenachdem $\alpha$ positiv, negativ oder Null ist.

Das entsprechende von $\mathfrak{E}_2$ aber bildet sich aus dem entsprechenden $\Sigma_{(1)}$ und dem entgegengesetzten $\Sigma_{(-1)}$ von $\mathfrak{E}^*(\mathfrak{F})$ wie folgt:

$$(160.) \qquad \alpha\,\Sigma_{(\operatorname{sgn}\alpha)} \dotplus \beta\,\Sigma_{(\operatorname{sgn}\beta)}.$$

Nach 225 ist aber

$$S_{(1)} \equiv \Sigma_{(1)}, \quad S_{(-1)} \equiv \Sigma_{(-1)},$$

folglich sind entsprechende Stützlineare (159.) und (160.) von $\mathfrak{E}_1$ und $\mathfrak{E}_2$ identisch.

227. *Die Begrenzung $E^*(\mathfrak{F})$ des durch eine beliebige ebene Figur $\mathfrak{F}$ bestimmten Ovalgebietes $\mathfrak{E}^*(\mathfrak{F})$ enthält nur Punkte* (0) *und* (1) (vgl. 196).

228. Beweis. Nach 21 liegt jeder Punkt $p$ von $E^*$ auf einer Stützgeraden $S$ von $\mathfrak{E}^*$. Sollte $p$ ein Punkt (2) sein, so müßte er auf der Verbindungsstrecke zweier von $p$ verschiedenen Punkte $q$ und $r$ von $\mathfrak{E}^*$ liegen, von denen jeder oder wenigstens einer ein Punkt (1) sein müßte. Die Punkte $q$ und $r$ könnten offenbar nur auf $S$ selbst liegen; denn lägen sie beide auf *einer* Seite von $S$, oder läge $q$ auf $S$, $r$ nicht, so würde $\overline{qr}$ mit $S$ entweder keinen Punkt gemein haben, oder nur den von $p$ verschiedenen Punkt $q$; auf verschiedenen Seiten der Stützgeraden $S$ können aber $q$ und $r$ als Punkte von $\mathfrak{E}^*$ nicht liegen (vgl. 19); $q$ und $r$ müßten also, wie behauptet, auf $S$ selbst liegen.

229. Wäre nun $q$, resp. $r$ ein Punkt (1), so würde er auf der Verbindungsstrecke zweier Punkte nullter Ordnung liegen, die, wie eben $q$ und $r$, beide auf $S$ und von denen mindestens der eine $q_0$ resp. $r_0$ auf der nämlichen Seite von $p$ liegen müßte wie $q$, resp. $r$; dann würde aber $p$ auf $q_0r_0$ liegen und somit ein Punkt (1) sein, gegen die Voraussetzung; derselbe Widerspruch ergibt sich auch, wenn $p$ als Punkt (1), $q$ als Punkt (0) angenommen wird, indem nur $q$ die Rolle von $q_0$ übernimmt. Leicht folgt aus obigem auch das Korollar:

230. *Ein Punkt auf $E^*(\mathfrak{F})$, durch den zwei Stützgerade gehen, kann nur ein Punkt* (0), *d. h. von $\mathfrak{F}$ selbst sein.*

231. *Das Ovalgebiet $\mathfrak{E}^*(\mathfrak{F})$, das durch eine ebene endliche Figur $\mathfrak{F}$ bestimmt wird, welche aus einem zusammenhängenden Stück besteht, enthält nur Punkte* (0) *und* (1).

232. Beweis. Die Annahme eines Punktes $p_2$ zweiter Ordnung würde auf einen Widerspruch führen. Derselbe könnte nach 227 sicher nicht auf

der Begrenzung $E^*$, sondern nur im Innern von $\mathfrak{E}^*$ liegen. Daraus würde folgen, daß er nur *zwischen* $S$ und $S'$ liegen könnte, wenn $S$ und $S'$ irgend zwei parallele Stützgerade von $\mathfrak{F}$ vorstellen. Denn läge der Punkt $p_2$ etwa auf $S$, so würde er, da $S$ als Stützgerade von $\mathfrak{F}$ auch Stützgerade von $E^*(\mathfrak{F})$ ist (vgl. 225), auf $E^*$ liegen, gegen 227, und läge $p_2$ außerhalb $S$ und $S'$, so daß etwa $S'$ zwischen $S$ und $p_2$ läge, so hätte man Punkte von $\mathfrak{E}^*$ — nämlich $p_2$ und den Berührpunkt $s$ von $S$ — zu verschiedenen Seiten der Stützgeraden $S'$ von $\mathfrak{E}^*$, gegen die Definition einer Stützgeraden.

233. Wenn nun aber $p_2$ zwischen $S$ und $S'$ liegt, so muß auf der Parallelen $S''$, die durch $p_2$ zu $S$ und $S'$ gezogen werden kann, sicher mindestens *ein* Punkt von $\mathfrak{F}$ liegen. $\mathfrak{F}$ könnte nämlich nicht aus *einem* zusammenhängenden Stücke bestehen, wenn die zu $\mathfrak{F}$ gehörigen auf $S$ und $S'$ sicher vorhandenen Punkte $s$ und $s'$ durch eine keinen $\mathfrak{F}$-Punkt enthaltende Gerade $S''$ getrennt würden.

Da die gemeinsame Richtung von $S, S', S''$ beliebig ist, so hat *jede* durch $p_2$ gehende Gerade $S''$ mindestens einen Punkt von $\mathfrak{F}$, d. h. einen Punkt (0) auf sich liegen. Betrachten wir nun, wie diese auf den $S''$ sicher vorhandenen Punkte (0) sich auf die Halbgeraden $H$ verteilen können, die von $p_2$ ausgehen.

234. Wenn zwei solche Halbgerade $H_1$ und $H_2$ existieren, auf denen kein Punkt (0) liegt, so muß *einer* der beiden Winkel zwischen $H_1$ und $H_2$ völlig von Halbgeraden $H$ erfüllt sein, die *keinen* Punkt (0) enthalten. Denn fände sich in jedem der beiden Winkel ein Halbstrahl, welcher einen Punkt (0) enthielte — im einen etwa $H'$, im andern $H''$ — so könnte wieder $\mathfrak{F}$ nicht aus *einem* zusammenhängenden Stück bestehen, da der Zusammenhang zwischen den auf $H'$ und $H''$ liegenden Figurpunkten $h'$ und $h''$ nicht anders als über den Linienzug $H_1 H_2$ sich herstellen könnte, der doch keinen Figurpunkt enthält. Somit bilden die Halbstrahlen $H_i$ *ohne* und ebenso die Halbstrahlen $H^{(i)}$ *mit* Figurpunkten je einen zusammenhängenden Winkel $W_i$ und $W^{(i)}$ und es ist

$$W_i + W^{(i)} = 2\pi.$$

235. Wenn nun $W^{(i)} > \pi$ ist, so liegen in $W^{(i)}$ offenbar Halbstrahlen $H^{(i)}$, von denen einer die Verlängerung des andern bildet, mit Figurpunkten $f$ und $f'$, welche $p_2$ zwischen sich einschließen. $p_2$ ist dann also auf der Sehne zweier Punkte (0) gelegen, und nicht ein Punkt (2), sondern ein

Punkt (1). Wenn aber $W^{(i)} = \pi$ angenommen wird, so liegen die Schenkel dieses Winkels selbst in einer Geraden $G$, welche offenbar Stützgerade von $\mathfrak{F}$ ist, da sie nach 233 sicher auf mindestens ihrer einen Halbgeraden einen Figurpunkt enthält, übrigens auf ihrer einen Seite den Winkel $W_i = \pi$ ohne irgend einen Figurpunkt liegen hat. Somit läge $p_2$ auf der Begrenzung von $\mathfrak{E}^*$, was nach 227 ausgeschlossen ist.

Nimmt man aber $W^{(i)} < \pi$, so geht durch $p_2$ eine ganze Schar Geraden, die keinen Figurpunkt enthalten, während doch bei 233 festgestellt wurde, daß *jede* Gerade durch $p_2$ einen Figurpunkt enthalten muß.

Jede der möglichen Annahmen führt also zu der Folgerung, daß der angenommene Punkt $p_2$ nicht existieren kann, q. e. d.

## DAS RANDPROBLEM.

236. Wir haben nun auch unsere Integralsätze noch genauer auszuarbeiten mit Hinsicht auf die Frage, wann der Integralwert

$$\int_{t=t_0}^{t=t'} f(x, y)\, g(x, y, i)\, dz$$

nicht ins *Innere*, sondern auf den *Rand* des Ovalgebietes fällt, dem er nach dem Obigen angehört.

Den Hauptsatz, den wir bei 305 erhalten werden, wird man nach den Ergebnissen der früheren Kapitel gerne als wahr anzunehmen geneigt sein. Sein strenger Beweis erfordert indessen mancherlei Vorbereitungen und umständliche Sorgfalt. Die Mühe, die wir aufzuwenden haben werden, dürfte sich aber schließlich auch insofern lohnen, als die Art, wie die Übertragung der Sätze von der Summe auf das Integral erfolgt, manches Typische an sich hat und für ähnliche Fälle unter Umständen als Muster dienen kann.*) Auch wolle man bemerken, daß die verhältnismäßige Umfänglichkeit der folgenden Entwicklungen dadurch wesentlich mitbedingt ist, daß wir den sich aufdrängenden indirekten Beweisgang, welcher zunächst Sätze über das *Innenliegen* von Punkten bringt, zum Anlaß nehmen, um *Randentfernungs-*

---

*) Z. B. in dem Falle, daß man den *Hölder*schen Mittelwertsatz auf Integrale verallgemeinernd feststellen will, wann statt des Ungleichheitszeichens das Gleichheitszeichen zu setzen ist.

*grenzen* für die innenliegenden Punkte abzuleiten. Dadurch ist dann erheblich mehr geleistet, als wenn bloß das Innenliegen bewiesen würde; man vergleiche etwa die Bemerkung bei 145. Für diese Entfernungsbestimmungen wird der einfache Hilfssatz 32 sehr wertvoll; er treibt sozusagen eine reiche Fülle von Blättern und Blüten.

237. Wir beweisen zunächst:

*Wenn an allen Stellen eines endlichen Teilintervalles* $\mu_0 \leqq t \leqq \mu'$ *unseres Integrationsintervalles* $t_0 \leqq t \leqq t'$ *das Integral*

$$(161.) \quad L(t) \equiv \int_{t=t_0}^{t=t} f(x, y) g(x, y, i) dz = \int_{t=t_0}^{t=t} \chi(t) g(x, y, i) dz$$

— *das genau die Bedeutung wie bei* 192—194 *haben soll* — *Punkte darstellt, deren Entfernung von* $\chi(t_0)E$ *größer ist als eine angebbare gleichbleibende Größe* $\varrho$, *und wenn zugleich für zwei zu diesem Teilintervalle gehörige Werte* $\tau'$ *und* $\tau''$, *die also eventuell auch noch mit* $\mu_0$, $\mu'$ *resp. zusammenfallen dürfen,*

$$(162.) \qquad \chi(\tau') > \chi(\tau'')$$

*ist, so liegen die Punkte* (161.) *für das Intervall* $\mu' \leqq t \leqq t'$ *sicher alle innerhalb und nicht auf dem Oval* $\chi(t_0)E$. *E bedeutet hierbei die Begrenzung des bei* 194 *auftretenden Ovalgebietes* $\mathfrak{E}$.

Der Beweis reicht von 238—244.

238. Zunächst sei $\chi(t) = 1$ vorausgesetzt. Wir gehen zurück auf die Darstellung

$$(128.) \quad L_n \equiv \int_{t=t_0}^{t=t_n} f \cdot g \cdot dz = \sum_1^n {}_\nu f_\nu \int_{t=t_{\nu-1}}^{t=t_\nu} g \cdot dz + R_n = J_n + R_n . ^{*)}$$

Es schließen sich offenbar analoge Darstellungen

$$(163.) \quad L_m \equiv \int_{t=t_0}^{t=t_m} f \cdot g \cdot dz = \sum_1^m {}_\nu f_\nu \int_{t=t_{\nu-1}}^{t='_\nu} g \cdot dz + R_m = J_m + R_m$$

an für alle zwischen $t_0$ und $t' = t_n$ liegenden Teilstellen $t_m$, so daß also im ganzen

$$m = 1, 2, 3, \dots n-1, n$$

sein darf.

---

*) Wobei $L_n$ Abkürzung für $L(t_n)$ ist.

Man hat bei 207—212 gesehen, daß $|R_n|$ — und analoges gilt für $|R_m|$ — bei genügend verengerter Teilung unter eine beliebig klein vorgeschriebene positive Größe, wir wollen sie jetzt $\delta$ nennen, herabsinkt; auch erkennt man bei nachträglicher Durchprüfung der eben zitierten Absätze, daß die Ungleichung

(164.) $$|R_m| < \delta$$

durch *ein und dieselbe* Verfügung für alle Werte $1, 2, 3 \ldots n$ von $m$ *gleichzeitig* erfüllt werden kann, ein Umstand, der für das Folgende wichtig ist.

Wir wollen nun diejenigen von den Teilstellen

(165.) $$t_0, t_1, t_2, t_3 \ldots t_{n-1}, t_n \equiv t',$$

welche zum Teilintervall $\mu_0 \mu'$ gehören, mit

(166.) $$t_\mu, t_{\mu+1}, t_{\mu+2}, \ldots t_{\mu+\sigma}$$

bezeichnen, die Teilung (165.) aber so einrichten, daß erstens mindestens zwei Teilstellen (166.) wirklich vorhanden sind, und zweitens so, daß

(167.) Intervall $\tau'\tau''$ zum Intervall $t_\mu t_{\mu+\sigma}$ gehörig,

eventuell mit ihm identisch und somit sicher

(168.) $$f_{\mu+\sigma} < f_\mu$$

ist. Wir können ferner $\delta$ unter einen angebbaren, übrigens beliebigen Bruchteil $\varrho_1$ von $\varrho$ herabdrücken:

(169.) $$0 < \delta < \varrho_1.$$

239. Dann steht fest:

(164a.) $$\text{Entf.}(J_m, L_m) < \delta < \varrho_1, \qquad (m = 1, 2, 3 \ldots n, \text{ vgl. } (164.))$$

(170.) $$\text{Entf.}(L_m, E) > \varrho,$$

also

(171.) $$\text{Entf.}(J_m, E) > \varrho - \varrho_1 = \varrho' \qquad (m = \mu, \mu+1, \mu+2, \ldots \mu+\sigma)$$

Dies besagt aber, da die Punkte $L_m$ innerhalb $E$ liegen, daß auch die Punkte $J_m$ innerhalb $E$ und mehr als einen angebbaren Bruchteil $\varrho'$ der Größe $\varrho$ von $E$ entfernt liegen.

240. Die nächsten Betrachtungen beziehen sich auf die Punkte $J_m$ für

(172.) $$m = \mu, \mu+1, \mu+2, \ldots \mu+\sigma, \mu+\sigma+1, \ldots n.$$

Um uns die Anwendung von Ergebnissen des ersten Hauptkapitels zu erleichtern, greifen wir auf die dortige Bezeichnungsweise zurück; wir dürfen setzen:

$$(173.)\qquad \begin{gathered} \int_{t=t_0}^{t=t_m} g\cdot dz = A_m = (0,m);\quad \int_{t=t_{\nu-1}}^{t=t_\nu} g\cdot dz = a_\nu,\ (a_0=0);\quad f_\nu = \varepsilon_\nu; \\ J_m = (m,m);\quad \sum_1^{m-1}{}_\nu f_\nu \int_{t=t_{\nu-1}}^{t=t_\nu} g\cdot dz + f_m \int_{t=t_{m-1}}^{t=t_{m+k}} g\cdot dz = (m, m+k); \end{gathered}$$

dann gewinnt das oben beim Absatz 9 eingeführte Schema von Symbolen

$$(174.)\qquad \begin{array}{r} (0\,0)\,(0\,1)\,(0\,2)\,(0\,3)\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ (0\,n) \\ (1\,1)\,(1\,2)\,(1\,3)\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ (1\,n) \\ (2\,2)\,(2\,3)\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ (2\,n) \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ (\mu\mu)\,(\mu,\mu+1)\ \ldots\ldots\ (\mu n) \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ \ldots\ldots\ldots \\ \ldots\ldots \\ (nn) \end{array}$$

die folgende besondere, für unseren jetzigen Zweck wichtige Bedeutung:

$$(175.)\qquad \begin{array}{r} 0,\quad \int_{t_0}^{t_1};\quad \int_{t_0}^{t_2};\quad \int_{t_0}^{t_3};\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ \int_{t_0}^{t_n} \\ f_1\int_{t_0}^{t_1};\quad f_1\int_{t_0}^{t_2};\quad f_1\int_{t_0}^{t_3};\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ f_1\int_{t_0}^{t_n} \\ f_1\int_{t_0}^{t_1}+f_2\int_{t_1}^{t_2};\ f_1\int_{t_0}^{t_1}+f_2\int_{t_1}^{t_3};\ \ldots\ldots\ldots\ f_1\int_{t_0}^{t_1}+f_2\int_{t_1}^{t_n} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ f_1\int_{t_0}^{t_1}+f_2\int_{t_1}^{t_2}+\cdots+f_\mu\int_{t_{\mu-1}}^{t_\mu};\ \ldots\ f_1\int_{t_0}^{t_1}+f_2\int_{t_1}^{t_2}+\cdots+f_\mu\int_{t_{\mu-1}}^{t_n}; \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ f_1\int_{t_0}^{t_1}+f_2\int_{t_1}^{t_2}+\cdots+f_n\int_{t_{n-1}}^{t_n}. \end{array}$$

Hierbei sind die angegebenen Integralgrenzen alle auf die Variable $t$ zu beziehen und unter den Integralen ist überall $g \cdot dz$ zu ergänzen.

241. Man betrachte nun folgende drei Kolumnen:

I.

$$\text{Entf.}((\mu+1,\ \mu+1+\varkappa),\ E_{(\mu+1)}) \geqq 0$$

$$\text{Entf.}((\mu+2,\ \mu+2+\varkappa),\ E_{(\mu+2)}) \geqq \left(\frac{f_{\mu+2}}{f_{\mu+1}} - \frac{f_{\mu+2}}{f_\mu}\right)\varrho'$$

$$\text{Entf.}((\mu+3,\ \mu+3+\varkappa),\ E_{(\mu+3)}) \geqq \left(\frac{f_{\mu+3}}{f_{\mu+2}} - \frac{f_{\mu+3}}{f_\mu}\right)\varrho'$$

$$\vdots$$

$$\text{Entf.}((\mu+\iota,\ \mu+\iota+\varkappa),\ E_{(\mu+\iota)}) \geqq \left(\frac{f_{\mu+\iota}}{f_{\mu+\iota-1}} - \frac{f_{\mu+\iota}}{f_\mu}\right)\varrho'$$

$$\vdots$$

$$\text{Entf.}((\mu+\sigma,\ \mu+\sigma+\varkappa),\ E_{(\mu+\sigma)}) \geqq \left(\frac{f_{\mu+\sigma}}{f_{\mu+\sigma-1}} - \frac{f_{\mu+\sigma}}{f_\mu}\right)\varrho'$$

II.

$$\text{Entf.}\ (\mathfrak{E}_{(\mu+1)}),\ E) \geqq \left(1 - \frac{f_{\mu+1}}{f_\mu}\right)\varrho'$$

$$\text{Entf.}\ (\mathfrak{E}_{(\mu+2)}),\ E) \geqq \left(1 - \frac{f_{\mu+2}}{f_{\mu+1}}\right)\varrho'$$

$$\text{Entf.}\ (\mathfrak{E}_{(\mu+3)}),\ E) \geqq \left(1 - \frac{f_{\mu+3}}{f_{\mu+2}}\right)\varrho'$$

$$\vdots$$

$$\text{Entf.}\ (\mathfrak{E}_{(\mu+\iota)}),\ E) \geqq \left(1 - \frac{f_{\mu+\iota}}{f_{\mu+\iota-1}}\right)\varrho'$$

$$\vdots$$

$$\text{Entf.}\ (\mathfrak{E}_{(\mu+\sigma)},\ E) \geqq \left(1 - \frac{f_{\mu+\sigma}}{f_{\mu+\sigma-1}}\right)\varrho'$$

III.

$$\text{Entf.}\ ((\mu+1,\ \mu+1+\varkappa),\ E) \geqq \left(1 - \frac{f_{\mu+1}}{f_\mu}\right)\varrho' \qquad (\varkappa=0,1,\ldots n-\mu-1)$$

$$\text{Entf.}\ ((\mu+2,\ \mu+2+\varkappa),\ E) \geqq \left(1 - \frac{f_{\mu+2}}{f_\mu}\right)\varrho' \qquad (\varkappa=0,1,\ldots n-\mu-2)$$

$$\vdots$$

$$\text{Entf.}\ ((\mu+\iota,\ \mu+\iota+\varkappa),\ E) \geqq \left(1 - \frac{f_{\mu+\iota}}{f_\mu}\right)\varrho' \qquad (\varkappa=0,1\ldots n-\mu-\iota)$$

$$\vdots$$

$$\text{Entf.}\ ((\mu+\sigma,\ \mu+\sigma+\varkappa),\ E) \geqq \left(1 - \frac{f_{\mu+\sigma}}{f_\mu}\right)\varrho' \qquad (\varkappa=0,1\ldots n-\mu-\sigma)$$

von denen wir so sprechen wollen, als ob sie alle drei nebeneinander in gleiche Höhe gesetzt wären, was nur aus Platzmangel nicht geschehen ist.

Die Ungleichungen der zweiten Kolumne bestehen zu Recht auf Grund der Definition (5.), des Satzes 34 und der mit (171.) übereinkommenden Ungleichung

$$\text{(176.)} \qquad \text{Entf.}((\mu+\iota,\ \mu+\iota),\ E) > \varrho'. \qquad {\scriptstyle (\iota=0,1,\dots\sigma)}$$

Die Ungleichungen der dritten Kolumne entstehen durch eine Art Addition aus den in gleicher Zeile stehenden Ungleichungen der ersten und zweiten Kolumne.

Die Ungleichungen der ersten Kolumne, abgesehen von der obersten, entstehen durch Transf. $\left[\frac{f_{\mu+\iota+1}}{f_{\mu+\iota}},\ (\mu+\iota,\ \mu+\iota)\right]$ aus den in der vorhergehenden Zeile stehenden Ungleichungen der dritten Kolumne, wobei $\iota$ mit der Ordnungszahl dieser vorhergehenden Zeile übereinstimmt.

Die oberste Ungleichung der ersten Kolumne gilt, weil $(\mu+1,\ \mu+1+\varkappa)$ ein Punkt von $\mathfrak{E}_{(\mu+1)}$ ist (vgl. 40), und es ist in ihr, wie in allen unter ihr stehenden Ungleichungen, der Sinn der Entfernung so aufzufassen, daß der Punkt im Innern, höchstens auf dem Rande des Ovalgebietes liegt, was für die Addition mit der folgenden Gleichung der zweiten Kolumne von Wichtigkeit ist. Man sieht, die Ungleichungen sind auf eine solche Weise miteinander verknüpft, daß sich aus der ersten alle übrigen bis zur letzten Ungleichung der dritten Kolumne

$$\text{(177.)} \qquad \text{Entf.}((\mu+\sigma,\ \mu+\sigma+\varkappa),\ E) \geqq \left(1-\frac{f_{\mu+\sigma}}{f_\mu}\right)\varrho',$$

auf welche es uns allein ankommt, ableiten lassen.

Das Schema würde die Hinzufügung einer weiteren Zeile gestattet haben, die letzte Ungleichung also auch nach Ersetzung von $\sigma$ durch $\sigma+1$ noch giltig sein; für die Ableitung unseres Integralsatzes ist dies aber offenbar ohne Belang.

Das Gleichheitszeichen gilt in irgend einer Ungleichung der zweiten Kolumne nach 34 *höchstens* dann, wenn der betreffende Transformationsfaktor $\frac{f_{\mu+\iota+1}}{f_{\mu+\iota}}$ gleich Eins ist, in der Ungleichung (177.), die von sämtlichen Ungleichungen der zweiten Kolumne abhängt, höchstens dann, wenn alle Trans-

formationsfaktoren des Kolumnenschemas gleich Eins sind und wenn somit

(178.) $$f_\mu = f_{\mu+1} = f_{\mu+2} = \cdots = f_{\mu+\sigma-1} = f_{\mu+\sigma}$$

ist.

242. Offenbar gilt nun aber auch der allgemeinere Satz:

(179.) $$\text{Entf.}((\mu+\sigma+\tau,\ \mu+\sigma+\tau+\varkappa),\ E) \geqq \left(1 - \frac{f_{\mu+\sigma}}{f_\mu}\right)\varrho'$$

(Gleichheitszeichen höchstens giltig unter Bedingung (178.))

$$(\tau = 0, 1, 2 \ldots n-\mu-\sigma;\ \varkappa = 0, 1, 2 \ldots n-\mu-\sigma-\tau)$$

Denn: $(\mu+\sigma+1,\ \mu+\sigma+1+\varkappa)$ ist seiner Definition gemäß ein Punkt auf der geraden Verbindungsstrecke $\overline{(\mu+\sigma, \mu+\sigma)\ (\mu+\sigma, \mu+\sigma+1+\varkappa)}$. Um die Strecken-Endpunkte $(\mu+\sigma, \mu+\sigma)$ und $(\mu+\sigma, \mu+\sigma+1+\varkappa)$ kann man nach (177.) Kreise mit dem Radius $\left(1 - \frac{f_{\mu+\sigma}}{f_\mu}\right)\varrho'$ schlagen, die völlig zu $\mathfrak{E}$ gehören. Daher gehören auch von den parallelen gemeinsamen beiden Tangenten der zwei Kreise die Strecken zwischen den *Berührpunkten* völlig zu $\mathfrak{E}$, ebenso das ganze von diesen beiden Strecken bestimmte Rechteck und das Ovalgebiet, welches durch dies Rechteck zusammen mit den beiden austretenden Halbkreisen gebildet wird. Da aber der um $(\mu+\sigma+1, \mu+\sigma+1+\varkappa)$ mit $\left(1 - \frac{f_{\mu+1}}{f_\mu}\right)\varrho'$ geschlagene Kreis offenbar diesem Ovalgebiet angehört, so gehört er auch zu $\mathfrak{E}$, die Ungleichung (179.) ist für $\tau = 1$ bewiesen. Von hier aus erhärtet man ganz analog ihre Giltigkeit für $\tau = 2$ usw.

243. Die Ungleichung (179.) liefert, wenn man $\varkappa = 0$ setzt, und auf Grund von (173.) die Bezeichnung $J_m$ wieder einführt:

(180.) $$\text{Entf.}(J_m, E) \geqq \left(1 - \frac{f_{\mu+\sigma}}{f_\mu}\right)\varrho'. \qquad (m = \mu+\sigma, \mu+\sigma+1, \ldots n)$$

Nun ist nach (168.)

$$\frac{f_{\mu+\sigma}}{f_\mu} < 1,$$

also

(181.) $$1 - \frac{f_{\mu+\sigma}}{f_\mu} > 0.$$

Angemerkt mag werden, daß $\frac{f_{\mu+\sigma}}{f_\mu}$ höchstens ab-, $1 - \frac{f_{\mu+\sigma}}{f_\mu}$ höchstens zunimmt, wenn man zwischen die vorhandenen Teilstellen des Integrationsintervalles weitere einschließt und dadurch die Bedeutung von $\mu, \sigma, f_\mu, f_{\mu+\sigma}$ eventuell verändert.

Wir dürfen nun voraussetzen, daß von vornherein nicht nur gemäß (169.)

$$\delta < \varrho_1,$$

sondern auch

(182.) $$\delta < \vartheta\left(1 - \frac{f_{\mu+\sigma}}{f_\mu}\right)\varrho' \qquad (0 < \vartheta < 1)$$

angenommen sei, daß also infolge von (164a.)

(183.) $$\text{Entf.}\,(L_m, J_m) < \vartheta\left(1 - \frac{f_{\mu+\sigma}}{f_\mu}\right)\varrho' \qquad (m = \mu + \sigma, \dots n)$$

ist. Nun war

(180.) $$\text{Entf.}\,(J_m, E) \geqq \left(1 - \frac{f_{\mu+\sigma}}{f_\mu}\right)\varrho'. \qquad (m = \mu + \sigma, \dots n)$$

Aus den beiden letzten Ungleichungen folgt:

(184.) $$\text{Entf.}\,(L_m, E) > (1 - \vartheta)\left(1 - \frac{f_{\mu+\sigma}}{f_\mu}\right)\varrho' \qquad (m = \mu + \sigma, \dots n)$$

oder, da infolge von (167.)

(185.) $$\frac{f_{\mu+\sigma}}{f_\mu} \leqq \frac{\chi(\tau'')}{\chi(\tau')}$$

ist:

(186.) $$\text{Entf.}\,(L_m, E) > (1 - \vartheta)\left(1 - \frac{\chi(\tau'')}{\chi(\tau')}\right)\varrho'. \qquad (m = \mu + \sigma, \dots n)$$

Nun ist $(1 - \vartheta)$, wie $\vartheta$, ein beliebiger echter Bruch; $(1 - \vartheta)\varrho'$ ist, wie $\varrho'$, ein beliebiger echter Bruchteil $\varrho''$ von $\varrho$; also darf man für (186.) setzen:

(186a.) $$\text{Entf.}\,(L_m, E) > \left(1 - \frac{\chi(\tau'')}{\chi(\tau')}\right)\varrho''$$

und dafür schließlich die äquivalente*) Ungleichung:

(187.) $$\text{Entf.}\,(L_m, E) > \left(1 - \frac{\chi(\tau'')}{\chi(\tau')}\right)\varrho, \qquad (m = \mu + \sigma, \dots n)$$

Für

$$L_m \equiv \int_{t=t_0}^{t=t_m} f \cdot g \cdot dz \qquad \text{(vgl. (163.))}$$

$$(m = \mu + \sigma,\ \mu + \sigma + 1, \dots n)$$

---

*) Es kommt hier in Betracht, daß $\varrho$ seiner bei 237 gegebenen Bedeutung zufolge stets durch eine etwas größere Entfernung ersetzt werden kann.

kann in diese Ungleichung offenbar

$$L(t) \equiv \int_{t=t_0}^{t=t} f \cdot g \cdot dz \qquad (\mu' \leqq t \leqq t')$$

eingesetzt werden, so daß wir erhalten:

$$\text{(187a.)} \qquad \text{Entf.}\,(L(t), E) > \left(1 - \frac{\chi(\tau'')}{\chi(\tau')}\right) \varrho. \qquad (\mu' \leqq t \leqq t')$$

Denn sollte sich die obere Grenze $t$ des Integrals $L(t)$ nicht unter den $t_\nu$ vorfinden, mittels deren wir das Intervall $t_0\, t'$ geteilt haben, so kann sie doch durch eine leichte mit Verengerung verbundene Veränderung der Teilung sofort unter diese Teilstellen eingereiht werden.

Lassen wir die bei 238 eingeführte Beschränkung $\chi(t_0) = 1$ fallen, so verwandelt sich (187a.) in

$$\text{(188.)} \qquad \text{Entf.}\,(L(t), \chi(t_0) E) > \left(1 - \frac{\chi(\tau'')}{\chi(\tau')}\right) \varrho, \qquad (\mu' \leqq t \leqq t')$$

wobei nicht etwa noch rechts ein Faktor $f_0$ zu setzen ist; die Entfernung links stellt zwar das $f_0$-fache der Entfernung links in (187a.) vor, zugleich aber bedeutet das $\varrho$ rechts den $f_0$-fachen Wert der Größe $\varrho$ in (187a.).

244. *Diese Ungleichung beweist und ergänzt zugleich den Satz* 237. *Ihre einfachere Form* (187a.) *bildet ein Analogon zu dem auf endliche Summen bezüglichen Satze* 39.

Wir zeigen ferner:

245. *Wenn an allen Stellen eines Teilintervalles* $\mu_0 \leqq t \leqq \mu'$ *unseres Integrationsintervalles* $t_0 \leqq t \leqq t'$ *das Integral*

$$A(t) \equiv \int_{t=t_0}^{t=t} g(x, y, i)\, dz \qquad \text{(Bedeutung wie bei 192—193)}$$

*einen Punkt darstellt, der von $E$ weiter als eine angebbare gleichbleibende Größe $\varrho$ entfernt ist, und zugleich zu diesem Teilintervall zwei Stellen $\tau_0$ und $\tau'$ gehören, für welche*

$$\chi(\tau_0) > \chi(\tau')$$

*ist, so liegen die Punkte*

$$L(t) \equiv \int_{t=t_0}^{t=t} \chi(t)\, g(x, y, i)\, dz \qquad \text{(Bedeutung wie bei 192—193)}$$

*für alle Werte t des Intervalles $\mu' t'$ innerhalb $\chi(t_0) E$ und nicht auf $\chi(t_0) E$. Hierbei bedeutet E wieder die Begrenzung des bei* 194 *auftretenden Ovals* $\mathfrak{E}$.

Der Beweis reicht von 246 bis 250.

246. Wir machen zunächst wieder die Voraussetzung $\chi(t_0) = 1$. Sind wieder

$$\mu, \mu+1, \mu+2 \ldots \mu+\sigma$$

die Indices der in das Teilintervall fallenden Teilstellen $t$, und ist die Teilung wieder, vergl. 238, so eng angenommen, daß

(189.) Intervall $\tau_0 \tau'$ zum Intervall $t_\mu \, t_{\mu+\sigma}$ gehörig

und also

$$f_{\mu+\sigma} < f_\mu \tag{190.}$$

ist, so wird nach unserer Voraussetzung

$$\text{Entf.}\,((0, \mu+\varkappa), E) > \varrho. \qquad (\varkappa = 0, 1, 2 \ldots \sigma) \tag{191.}$$

Indem man auf diese Ungleichung die Transformationen

$$\left[f_1, (00)\right], \left[\frac{f_2}{f_1}, (11)\right], \ldots \left[\frac{f_\mu}{f_{\mu-1}}, (\mu-1), (\mu-1)\right] \tag{192.}$$

(vergl. 27) der Reihe nach übereinander anwendet, ergeben sich die Ungleichungen einer ersten Kolumne:

I.

$$\begin{aligned} &\text{Entf.}\,((1, \mu+\varkappa), E^{(1)}) > f_1 \varrho \qquad (\varkappa = 0, 1, 2 \ldots \sigma)\\ &\text{Entf.}\,((2, \mu+\varkappa), E^{(2)}) > f_2 \varrho \\ &\qquad \vdots \qquad\qquad \vdots \\ &\text{Entf.}\,((\mu, \mu+\varkappa), E^{(\mu)}) > f_\mu \varrho, \end{aligned} \tag{193.}$$

wobei $E^{(i)}$ die bei 27 eingeführte Bedeutung hat. Aus der letzten Ungleichung folgt, weil $E^{(\mu)}$ zu $\mathfrak{E}$ gehört:

$$\text{Entf.}\,((\mu, \mu+\varkappa), E) > f_\mu \, \varrho. \qquad (\varkappa = 0, 1, 2 \ldots \sigma) \tag{194.}$$

247. Indem man auf diese Ungleichung der Reihe nach übereinander die Transformationen

$$\left[\frac{f_{\mu+1}}{f_\mu}, (\mu, \mu)\right], \left[\frac{f_{\mu+2}}{f_{\mu+1}}, (\mu+1, \mu+1)\right], \ldots \left[\frac{f_{\mu+\sigma}}{f_{\mu+\sigma-1}}, (\mu+\sigma-1, \mu+\sigma-1)\right] \tag{195.}$$

anwendet, wobei $E$ in gewisse Ovale

$$(196.)\qquad E^{(0)}_{(\mu+1)}\,(\equiv E_{(\mu+1)}),\; E^{(1)}_{(\mu+1)},\; E^{(2)}_{(\mu+1)}\,\ldots\, E^{(\sigma-1)}_{(\mu+1)}$$

übergeht, entstehen die Ungleichungen einer zweiten Kolumne, in der wir Gleichung (194.) selbst noch einmal als Spitzengleichung anschreiben:

II.

$$(197.)\quad \begin{array}{lll}
\text{Entf.}\,((\mu,\mu+\varkappa),\,E) & >f_\mu\cdot\varrho & (\varkappa=0,1,2\ldots\sigma)\\
\text{Entf.}\,((\mu+1,\mu+1+\varkappa),\,E^{(0)}_{(\mu+1)}) & >f_{\mu+1}\cdot\varrho & (\varkappa=0,1,2,\ldots\sigma-1)\\
\text{Entf.}\,((\mu+2,\mu+2+\varkappa),\,E^{(1)}_{(\mu+1)}) & >f_{\mu+2}\cdot\varrho & (\varkappa=0,1,2,\ldots\sigma-2)\\
\vdots & \vdots & \vdots\\
\text{Entf.}\,((\mu+\sigma-1,\mu+\sigma-1),\,E^{(\sigma-2)}_{(\mu+1)}) & >f_{\mu+\sigma-1}\cdot\varrho & (\varkappa=0,1)\\
\text{Entf.}\,((\mu+\sigma,\mu+\sigma),\,E^{(\sigma-1)}_{(\mu+1)}) & >f_{\mu+\sigma}\cdot\varrho. & (\varkappa=0)
\end{array}$$

Indem wir in ihnen $\varkappa$ gleich Null setzen, erhalten wir Auskunft über die Entfernung der Transformationszentren von den der Transformation unterworfenen Ovalen und leiten vermittelst Satz 34 z. B. die Ungleichung:

$$\text{Entf.}\,(E^{0}_{(\mu+1)},\,E)\geqq\left(1-\frac{f_{\mu+1}}{f_\mu}\right)f_\mu\cdot\varrho=(f_\mu-f_{\mu+1})\,\varrho,$$

überhaupt eine ganze dritte Kolumne von Ungleichungen ab, wobei wir die letzte Gleichung von Kolumne II übrigens noch gar nicht mitverwenden:

III.

$$(198.)\quad \begin{array}{ll}
\text{Entf.}\,(E^{(0)}_{(\mu+1)},\,E) & \geqq(f_\mu-f_{\mu+1})\,\varrho\\
\text{Entf.}\,(E^{(1)}_{(\mu+1)},\,E^{(0)}_{(\mu+1)}) & \geqq(f_{\mu+1}-f_{\mu+2})\,\varrho\\
\vdots & \vdots\\
\text{Entf.}\,(E^{(\sigma-1)}_{(\mu+1)},\,E^{(\sigma-2)}_{(\mu+1)}) & \geqq(f_{\mu+\sigma-1}-f_{\mu+\sigma})\,\varrho.
\end{array}$$

Aus dieser ergibt sich eine vierte Kolumne, in welcher die $\nu$-te Ungleichung allgemein die „Summe“ der $\nu$ ersten Ungleichungen von Kolumne III ist:

IV.

$$(199.)\quad \begin{array}{ll}
\text{Entf.}\,(E^{0}_{(\mu+1)},\,E) & \geqq(f_\mu-f_{\mu+1})\,\varrho\\
\text{Entf.}\,(E^{(1)}_{(\mu+1)},\,E) & \geqq(f_\mu-f_{\mu+2})\,\varrho\\
\vdots & \vdots\\
\text{Entf.}\,(E^{(\sigma-1)}_{(\mu+1)},\,E) & \geqq(f_\mu-f_{\mu+\sigma})\,\varrho.
\end{array}$$

Endlich folgt aus dieser Kolumne, kombiniert mit der um die Spitzengleichung verkürzten Kolumne II, eine fünfte Kolumne, in der wir, um gleich die für uns allein wichtigen Ungleichungen zu erhalten, $\varkappa = 0$ setzen:

V.

$$\text{(200.)} \qquad \begin{aligned} &\text{Entf.}((\mu+1,\ \mu+1),\ E) > f_\mu \varrho \\ &\text{Entf.}((\mu+2,\ \mu+2),\ E) > f_\mu \varrho \\ &\qquad \vdots \qquad\qquad \vdots \\ &\text{Entf.}((\mu+\sigma,\ \mu+\sigma),\ E) > f_\mu \varrho. \end{aligned}$$

Diese letzten Ungleichungen können wir nach (173.) in die eine Ungleichung

$$\text{(201.)} \qquad \text{Entf.}(J_m,\ E) > f_\mu \cdot \varrho \qquad {\scriptstyle (m=\mu,\ \mu+1,\dots \mu+\sigma)}$$

zusammenfassen, wobei wir die erste von (194.) noch hinzunehmen.

248. Indem wir nun die Teilung

$$\text{(202.)} \qquad t_\mu,\ t_{\mu+1},\ t_{\mu+2} \dots t_{\mu+\sigma}$$

bereits so eng gemacht denken, daß

$$\text{(203.)} \qquad \text{Entf.}(L_m,\ J_m) < \beta \cdot f_\mu \cdot \varrho \qquad {\scriptstyle (0<\beta<1)}$$
$$(m=\mu,\ \mu+1,\dots \mu+\sigma)$$

ist, ergibt sich aus (201.) und (203.)

$$\text{Entf.}(L_m,\ E) > (1-\beta) f_\mu \cdot \varrho,$$

in anderer Bezeichnung

$$\text{(204.)} \qquad \text{Entf.}(L_m,\ E) > \beta' f_\mu \cdot \varrho, \qquad {\scriptstyle (0<\beta'<1)}$$

und, da

$$f_\mu \geqq \chi(\tau_0)$$

angenommen werden darf:

$$\text{Entf.}(L_m,\ E) > \beta' \cdot \chi(\tau_0) \cdot \varrho$$

oder in Anbetracht, daß $\varrho$ immer noch etwas vergrößert werden darf, wie es auch seiner bei 245 angegebenen Bedeutung entsprechend gegeben sein mag:

$$\text{(205.)} \qquad \text{Entf.}(L_m,\ E) > \chi(\tau_0) \cdot \varrho \qquad {\scriptstyle (m=\mu,\ \mu+1,\dots \mu+\sigma)}$$

Statt unserer Teilstellen (202.) dürfen wir aber — man vergleiche die Betrachtung am Schlusse von 243 — jeden Wert $t$ des Intervalles $\mu_0\,\mu'$ in (205.) einsetzen und erhalten:

(206.) $$\text{Entf.}(L(t), E) > \chi(\tau_0)\cdot\varrho. \qquad (\mu_0 \leqq t \leqq \mu')$$

Hierbei ist noch besonders zu bemerken, daß wegen

$$\chi(\tau_0) > \chi(\tau') \geqq 0$$

stets

(207.) $$\chi(\tau_0) > 0$$

ist.

249. Somit sind alle Vorbedingungen zur Anwendung des Satzes 237 bezw. (188.) gegeben und es ergibt sich, daß alle Punkte $L(t)$ für das Intervall $\mu' t'$, die Grenzen eingeschlossen, *innerhalb*, nicht auf $E$ liegen und eine Entfernung größer als

$$(\chi(\tau_0) - \chi(\tau'))\varrho$$

von $E$ haben.

Wenn wir an Stelle von $\chi(t_0) = 1$ ein beliebiges positives $\chi(t_0)$ gesetzt haben, nimmt unser Ergebnis die Gestalt an:

(208.) $$\text{Entf.}(L(t), \chi(t_0)E) > \chi(t_0)(\chi(\tau_0) - \chi(\tau'))\varrho. \qquad (\mu' \leqq t \leqq t')$$

250. *Diese Ungleichung beweist und ergänzt zugleich den Satz* 245.

251. Wir sehen jetzt:

*Wenn das Integral*

$$L(t') \equiv \bar{X}' + i\bar{Y}' \equiv \int_{t=t_0}^{t=t'} f(x, y) g(x, y, i) dz$$

*einen Punkt auf, nicht innerhalb* $\chi(t_0)E$ *vorstellen soll, so darf kein endlicher abgeschlossener* (*vgl.* 83) *Teil des Integrationsintervalles freibleiben von solchen Werten t — wir wollen diese Werte jetzt zur Unterscheidung mit* $\tau$ *bezeichnen —, für welche die Entfernung des Punktes*

(209.) $$A(\tau) \equiv \int_{t=t_0}^{t=\tau} g(x, y, i) dz$$

*von der Ovallinie E kleiner ist als jede angebbare Größe* $\varrho$, *mit andern Worten: freibleiben von Werten* $\tau$, *für welche der Punkt* $A(\tau)$ *auf E selbst fällt, noch anders ausgedrückt: für welche die entsprechenden Punkte der stetigen Linienmannigfaltigkeit* 𝔄 *mit Punkten der ebenfalls stetig zusammenhängenden Ovallinie E zusammenfallen.*

252. *Die eben gekennzeichnete Menge der Punkte* $\tau$ *— wir wollen sie M nennen — ist aber von der Art, daß ein* s t e t i g e r *Linienzug, der M enthalten soll,* e i n d e u t i g *bestimmt ist.*

Diese Behauptung, so einleuchtend sie ist, will ich, der Vorsicht und Vollständigkeit zu Liebe, in den folgenden Absätzen 253—263 doch eingehend begründen, selbst auf die Gefahr hin, mir den Vorwurf der Weitschweifigkeit zuzuziehen.

253. Aus der Menge $M$, zu der jetzt noch $t_0$, falls nicht schon darin enthalten, hinzugenommen werde, läßt sich bei beliebig vorgegebenem positiven $\varepsilon$ offenbar stets eine Wertreihe $T$

$$(210.) \qquad \tau_0(=t_0),\ \tau_1,\ \tau_2,\ \tau_3 \ldots \tau_{m-1},\ \tau_m(=t')$$

herausheben, für welche

$$(211.) \qquad |\tau_i - \tau_{i-1}| < \varepsilon. \qquad {\scriptstyle (i=1,2,3\ldots m)}$$

Sofern nun wohl nicht bestritten wird, daß

$$(212.) \qquad X^{(t)} + i\,Y^{(t)} \equiv \int_{t=t_0}^{t=t} g(x,\,y,\,i)\,d(x+iy)$$

eine stetige Funktion von $x$, $y$ und somit nach 189 auch von $t$ ist, gilt das nämliche von den Funktionen $X^{(t)}$ und $Y^{(t)}$ einzeln genommen. Da aber stetige reelle Funktionen nach *G. Cantor* gleichmäßig stetig sind, wird sich $\varepsilon$ so wählen lassen, daß bei beliebig vorgegebenem positiven $\delta$, wenn

$$(213.) \qquad |t - \bar{t}| < \varepsilon,$$

die Lage von $t, \bar{t}$ im Intervall übrigens beliebig ist, die Ungleichungen

$$(214.) \qquad |X^{(t)} - X^{(\bar{t})}| < \delta,\ |Y^{(t)} - Y^{(\bar{t})}| < \delta$$

und somit wegen (211.) auch die Ungleichungen

$$(215.) \qquad |X^{(\tau_i)} - X^{(\tau_{i-1})}| < \delta,\ |Y^{(\tau_i)} - Y^{(\tau_{i-1})}| < \delta$$

erfüllt sind.

254. Die Punkte von $E$ lassen sich nun, wenn $\mathfrak{E}$ überhaupt einen innern Punkt hat, ein-eindeutig auf einen Parameter $\vartheta$ — etwa auf die Winkelkoordinate eines Polarkoordinatensystems, dessen Pol innerhalb $E$ und weiter, als eine angebbare Größe $\varrho$ besagt, von $E$ entfernt liegt — beziehen, so daß die Koordinaten $X$, $Y$ eines $E$-Punktes als Funktionen $X_\vartheta$ und $Y_\vartheta$ von $\vartheta$ erscheinen. Dabei seien die den Linien $\mathfrak{A}$ und $E$ gemeinsamen Punkte

$$(216.) \qquad X^{(\tau_i)} + i\,Y^{(\tau_i)} = X_{\vartheta_i} + i\,Y_{\vartheta_i},$$

so daß also die Reihe $\Theta$

$$\vartheta_0,\ \vartheta_1,\ \vartheta_2,\ \vartheta_3 \ldots \vartheta_m (= \vartheta') \tag{217.}$$

der Reihe (210.) entspricht, wobei nur über den Wert $\vartheta_0$ noch ein Zweifel bestehen kann.

255. Da unter den $X^{(\tau_i)} + i Y^{(\tau_i)}$ *gleiche* Werte vorkommen können, so ist nicht ausgemacht, daß die $\vartheta_i$ alle verschieden sind.

256. Da mit $\Delta X^{(\tau_i)} = \Delta X_{\vartheta_i}$ und $\Delta Y^{(\tau_i)} = \Delta Y_{\vartheta_i}$ auch die Entfernung $r$ aufeinanderfolgender Punkte $X_{\vartheta_i} + i Y_{\vartheta_i}$ und mit dieser schließlich

$$\Delta \vartheta_i \leqq 2 \arcsin \frac{r}{2\varrho} < \pi, \tag{218.}$$

d. h. beliebig klein wird, so läßt sich bei beliebig klein vorgeschriebenem positiven $\gamma$ durch genügend klein gewähltes $\delta$

$$|\vartheta_i - \vartheta_{i-1}| < \gamma \tag{219.}$$

machen.

257. Aus der Zuordnung der $\vartheta_i$ zu den $\tau_i$ ergibt sich eine Zuordnung der $\vartheta$ zu den Werten $t$ des Intervalls überhaupt, indem man jedem Grenzwert von Werten $\tau_i$ den Grenzwert der entsprechenden $\vartheta_i$ zuordnet. Genauer:

Man stelle eine Reihe von Reihen $T$ auf:

$$\begin{array}{l|l}
T_1 & \tau_{10}(=t_0),\ \tau_{11},\ \tau_{12},\ \ldots\ \tau_{1,m_1}(=t') \\
T_2 & \tau_{20}(=t_0),\ \tau_{21},\ \tau_{22},\ \ldots\ \tau_{2,m_1},\ \tau_{2,m_1+1},\ \ldots\ \tau_{2,m_2}(=t') \\
T_3 & \tau_{30}(=t_0),\ \tau_{31},\ \tau_{32},\ \ldots\ \tau_{3,m_1},\ \ldots\ldots\ldots\ \tau_{3,m_2},\ \ldots\ \tau_{3,m_3}(=t') \\
\vdots & \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \\
T_\nu & \tau_{\nu 0}(=t_0),\ \tau_{\nu 1},\ \tau_{\nu 2},\ \ldots\ \tau_{\nu,m_1},\ \ldots\ldots\ldots\ \tau_{\nu,m_2},\ \ldots\ \tau_{\nu,m_3},\ \ldots\ \tau_{\nu,m_\nu}(=t') \\
\vdots & \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \\
 & \qquad\qquad \text{in infinitum.}
\end{array} \tag{220.}$$

Für $\nu' > \nu$ sollen die $\tau_{\nu i}$ unter den $\tau_{\nu' i}$ stets wieder mit enthalten sein, die Größen $\varepsilon, \gamma$ sollen für $T_\nu$ die resp. Werte $\varepsilon_\nu, \gamma_\nu$ annehmen und es soll etwa

$$\begin{cases} \varepsilon_1 > 2\varepsilon_2 > 4\varepsilon_3 > 8\varepsilon_4 \ldots > 2^{\nu-1}\varepsilon_\nu > \ldots \\ \gamma_1 > 2\gamma_2 > 4\gamma_3 > 8\gamma_4 \ldots > 2^{\nu-1}\gamma_\nu > \ldots \end{cases} \tag{221.}$$

sein. Auch für *nicht* in $T_\nu$ enthaltene Werte $\tau, \bar{\tau}$ der Menge $M$ dürfen

wir annehmen, daß aus

$$(222.)\qquad |\tau - \bar{\tau}| < \varepsilon_\nu$$

$$(223.)\qquad |\vartheta - \bar{\vartheta}| < \gamma_\nu$$

folgt, vgl. den analogen Schluß in 253. Dies alles läßt sich durch richtige Annahme der willkürlichen Größen $\varepsilon$ erreichen.

258. Ein Wert $t$ des Intervalls nun, der nicht unter den $\tau_{\nu i}$ selbst vorkommt, fällt der Größe nach zwischen zwei aufeinanderfolgende dieser Werte — wir nennen sie von links nach rechts gehend der Abkürzung wegen $p_\nu$ und $p'_\nu$ — in jeder Reihe $T_\nu$. Immer gilt nach den vorhin getroffenen Bestimmungen:

$$(224.)\qquad \text{Intervall } p_{\nu+1}p'_{\nu+1} \text{ gehört zum Intervall } p_\nu p'_\nu$$

$$(225.)\qquad |p_\nu - p'_\nu| < \varepsilon_\nu, \qquad \lim_{\nu=\infty} \varepsilon_\nu = 0,$$

und es nähern sich also sowohl die $p_\nu$ als die $p'_\nu$ mit wachsendem $\nu$ einer Grenze, die mit $t$ übereinstimmen muß.

259. Betrachtet man nun die den $T_\nu$ entsprechenden Reihen $\Theta_\nu$ gebildet aus den $\vartheta_{\nu i}$, und nennt die den $p_\nu$ entsprechenden Werte kurz $\eta_\nu$, so gilt wegen (225.) und (222.)—(223.) auch

$$(226.)\qquad |\eta_\nu - \eta_{\nu+1}| < \gamma_\nu, \quad \lim_{\nu=\infty} \gamma_\nu = 0,$$

woraus gefolgert werden kann

$$(227.)\qquad \Big|\sum_{\nu}^{\nu+i-1}{}_{\mu} (\eta_\mu - \eta_{\mu+1})\Big| = |\eta_\nu - \eta_{\nu+i}| < \gamma_\nu + \gamma_{\nu+1} + \gamma_{\nu+2} + \cdots + \gamma_{\nu+i-1} < \sigma_\nu$$

$$(\sigma_\nu = \gamma_\nu + \gamma_{\nu+1} + \gamma_{\nu+2} \ldots \text{ in inf.})$$

oder, da

$$(228.)\qquad \lim_{\nu=\infty} \sigma_\nu = 0$$

ist:

$$(229.)\qquad |\eta_\nu - \eta_{\nu+i}| < \text{beliebig kleine Größe,}$$

(für genügend großes $\nu$, bei beliebigem $i$).

Also nähern sich die $\eta_\nu$ einer bestimmten Grenze $\vartheta$, die $\eta'_\nu$, welche den $p'_\nu$ entsprechen, offenbar der nämlichen.

260. Die Willkür, die bei Auswahl der zur Aufstellung der $T_\nu$ verwendeten $\tau$ walten darf, hat auf den Wert der Grenze $\vartheta$ keinen Einfluß. Denn nehmen wir an, bei einer andern Auswahl wäre

$$(230.)\qquad t = \lim_{\nu=\infty} \bar{p}_\nu, \quad \bar{\vartheta} = \lim_{\nu=\infty} \bar{\eta}_\nu,$$

und es wäre $\bar{\vartheta}$ von $\vartheta$ verschieden ausgefallen, etwa

$$(231.)\qquad |\bar{\vartheta} - \vartheta| = 3\alpha \qquad (\alpha \text{ endlich}),$$

so würde man doch für alle $\nu > \nu'$, sobald nur $\nu'$ genügend groß gewählt ist, die Ungleichungen

$$(232.)\qquad |\vartheta - \eta_\nu| < \alpha, \quad |\bar{\vartheta} - \bar{\eta}_\nu| < \alpha$$

erzielen können, woraus vermittelst (231.) folgt

$$(233.)\qquad |\bar{\eta}_\nu - \eta_\nu| > \alpha, \quad (\text{für } \nu > \nu').$$

Andrerseits kann man bei beliebig gegebenem positiven $\varepsilon$ für alle $\nu > \nu''$, wenn $\nu''$ genügend groß gewählt ist, die Ungleichungen

$$(234.)\qquad |t - p_\nu| < \frac{\varepsilon}{2}, \quad |t - \bar{p}_\nu| < \frac{\varepsilon}{2},$$

also auch

$$(235.)\qquad |\bar{p}_\nu - p_\nu| < \varepsilon$$

erzielen und kann $\varepsilon$ so klein gewählt denken, daß

$$(236.)\qquad |\bar{\eta}_\nu - \eta_\nu| < \alpha$$

wird für alle $\nu > \nu''$.

Die beiden Ungleichungen (233.) und (236.) ergeben aber für Werte $\nu > \nu', \nu''$ unlösbaren Widerspruch, und die Annahme zweier verschiedenen Grenzen $\vartheta$ und $\bar{\vartheta}$ erweist sich als unzulässig.

261. Über das Vorhandensein eines Wertes

$$\vartheta_0 = \vartheta_{00} = \vartheta_{10} = \vartheta_{20} = \text{usw.} \ldots,$$

der dem Werte

$$t_0 = \tau_{00} = \tau_{10} = \tau_{20} = \text{usw.} \ldots$$

entspräche, konnte bisher ein Zweifel obwalten. Man wird nun aber mit den nämlichen Mitteln, wie sie oben verwendet sind, leicht zeigen, daß dem $t_0$ als Grenze der Werte

$$\tau_{11}, \tau_{21}, \tau_{31}, \ldots \text{usw.}$$

ein bestimmter Punkt $\vartheta_0$ als Grenze der Werte

$$\vartheta_{11},\ \vartheta_{21},\ \vartheta_{31},\ \ldots \text{ usw.}$$

entspricht.

262. Nun ist offenbar bei dieser Art der Zuordnung $\vartheta$ eine eindeutige, stetige Funktion von $t$ geworden, was wir wohl nicht des näheren auszuführen brauchen. Es sind aber

$$X_\vartheta,\ Y_\vartheta \text{ stetige Funktionen von } \vartheta,$$

also ist auch

$$(237.)\qquad \begin{array}{l} X_\vartheta \text{ eine stetige Funktion } X_{(t)} \text{ von } t, \\ Y_\vartheta \text{ eine stetige Funktion } Y_{(t)} \text{ von } t. \end{array}$$

Es waren ferner

$$X^{(t)},\ Y^{(t)} \text{ stetige Funktionen von } t$$

und es ist vermittelst (216.) und (237.)

$$(238.)\qquad X^{(\tau)} = X_{(\tau)};\quad Y^{(\tau)} = Y_{(\tau)}$$

für beliebige Werte $t=\tau$ der Menge $M$. Reelle stetige Funktionen von $t$, wie $X^{(t)}$ und $X_{(t)}$, oder $Y^{(t)}$ und $Y_{(t)}$ können aber bekanntlich nicht für eine Wertmenge, wie $M$ sie ist, übereinstimmende Werte haben, ohne für jeden Wert $t$ des Intervalls übereinzustimmen, also ist im Intervall $t_0 t'$

$$(239.)\qquad X^{(t)} \equiv X_{(t)};\quad Y^{(t)} \equiv Y_{(t)}$$

und wir erhalten den schon in 251—252 angedeuteten Satz:

263. *Wenn $\bar{X}' + i\,\bar{Y}'$ einen Punkt auf, nicht innerhalb $\chi(t_0)E$ vorstellen soll, so muß sich das dem Intervall $t_0 t'$ zukommende Stück der Linie $\mathfrak{A}$ mit dem entsprechenden (dem Intervall $\vartheta_0 \vartheta'$ zukommenden) Stück der Ovallinie $E$ decken. Da aber nicht bewiesen ist, auch (vgl. 255.) gar nicht bewiesen werden konnte, daß $t$ eine eindeutige Funktion von $\vartheta$ sei, so kann $\mathfrak{A}$ auf dem betreffenden Stück von $E$ auch hin- und herlaufen und sich dabei ganz oder stellenweise ein- oder mehrfach selber überdecken.*

Im Beweise hatten wir bei 254 vorausgesetzt, daß $\mathfrak{E}$ einen innern Punkt enthält; wenn dies nicht der Fall ist, muß $\mathfrak{E}$, ebenso wie $\chi(t_0)\mathfrak{E}$, eine gerade Strecke (oder ein Punkt) sein und der Satz wird selbstverständlich.

Wir schieben von 264—266 zur Vorbereitung unseres weiteren Vordringens einige Definitionen und Hilfsbetrachtungen ein.

264. Als eine Stelle $\tau$, wo die monotone nicht steigende Funktion $\chi(t)$ „sich bewegt", will ich eine solche bezeichnen, für welche mindestens eine der beiden Bedingungen erfüllt ist:

$$(240.) \qquad \begin{aligned} &\text{a)}\ \chi(\tau-\varepsilon) > \chi(\tau) \\ &\text{b)}\ \chi(\tau+\varepsilon) < \chi(\tau) \end{aligned}$$

und zwar für beliebiges, also auch beliebig kleines *positives* $\varepsilon$. Nur natürlich innerhalb desjenigen Bereiches müssen sich die Werte $\tau-\varepsilon$, $\tau+\varepsilon$ halten, für welchen $\chi(t)$ als monotone nicht zunehmende Funktion definiert ist.

„Zu einem Intervall $\tau'\tau''$ gehört eine Stelle, wo sich $\chi(t)$ bewegt" soll so viel heißen als: Entweder das Intervall enthält einen inneren Punkt $\tau$, für welchen mindestens eine der Bedingungen (240.) erfüllt ist, oder seine untere Grenze $\tau'$ erfüllt die Bedingung

$$(241.) \qquad \chi(\tau'+\varepsilon) < \chi(\tau')$$

oder seine obere Grenze $\tau''$ erfüllt die Bedingung

$$(242.) \qquad \chi(\tau''-\varepsilon) > \chi(\tau'').$$

265. Eine Stelle $\tau$, an welcher sich $\chi(t)$ bewegt, und welche *ins Innere* des Intervalls fällt, für welches $\chi(t)$ als monotone nicht zunehmende Funktion definiert ist, befriedigt immer auch die Bedingung

$$(243.) \qquad \chi(\tau-\varepsilon) > \chi(\tau+\varepsilon')$$

($\varepsilon$, $\varepsilon'$ beliebig positiv, soweit $\tau-\varepsilon$ und $\tau+\varepsilon'$ noch zum Intervall gehören). Und umgekehrt:

Eine innere Stelle $\tau$ des Intervalles, welche die vorige Bedingung befriedigt, befriedigt immer auch eine der beiden Bedingungen (240.), ist also eine Stelle, an der sich $\chi(t)$ bewegt.

Denn aus (243.) folgt, daß für beliebig kombinierte positive Werte $\varepsilon=\varepsilon_1$, $\varepsilon'=\varepsilon_1'$, welche $\tau-\varepsilon$ und $\tau+\varepsilon'$ ins Intervall fallen lassen, die drei Werte $\chi(\tau-\varepsilon)$, $\chi(\tau)$, $\chi(\tau+\varepsilon')$ eine der drei Ungleichungen erfüllen müssen:

$$(244.) \qquad \begin{aligned} &\chi(\tau-\varepsilon) > \chi(\tau) > \chi(\tau+\varepsilon') \\ &\chi(\tau-\varepsilon) > \chi(\tau) = \chi(\tau+\varepsilon') \\ &\chi(\tau-\varepsilon) = \chi(\tau) > \chi(\tau+\varepsilon'). \end{aligned}$$

Läßt man nun $\varepsilon$ und $\varepsilon'$ von $\varepsilon_1$ und $\varepsilon_1'$ aus beliebig zunehmen, so ist, soweit die Funktion monoton bleibt, stets die nämliche Ungleichung erfüllt,

läßt man $\varepsilon$ und $\varepsilon'$ von $\varepsilon_1$ und $\varepsilon_1'$ aus beliebig gegen Null abnehmen, so kann die erfüllte Ungleichung ihre Form wechseln, indem ein Ungleichheitszeichen in ein Gleichheitszeichen sich verwandelt, nicht aber umgekehrt, sie kann also von der ersten in die zweite oder dritte Form bei (244.) übergehen, von der zweiten oder dritten Form aus aber in keine andere mehr, da

$$\chi(\tau-\varepsilon)=\chi(\tau)=\chi(\tau+\varepsilon')$$

wegen (243.) ausgeschlossen ist. Mindestens *eine* Ungleichung (244.) bleibt also stets unverändert erfüllt.

266. Über das Vorkommen von Stellen, an denen sich $\chi(t)$ bewegt, geben die folgenden beiden Sätzchen einigen Aufschluß:

a) *Wenn*

$$t_0 \leqq \tau_1 < \tau_2 \leqq t'$$

*und*

$$\chi(\tau_1) > \chi(\tau_2)$$

*ist, so gehört zum Intervall* $\tau_1\tau_2$ *mindestens eine Stelle* $\tau$, *an der sich* $\chi(t)$ *bewegt.*

Beweis vermittelst der Methode der fortgesetzten Halbierung des Intervalles.

b) *Wenn*

$$t_0 \leqq \tau_1 < \tau_2 < \tau_3 < \tau_4 \leqq t'$$

*und*

$$\chi(\tau_1) > \chi(\tau_2) \geqq \chi(\tau_3) > \chi(\tau_4)$$

*ist, so gehören zum Intervall* $\tau_1\tau_4$ *mindestens zwei getrennte Stellen* $\bar{\tau}, \bar{\bar{\tau}}$, *an denen sich* $\chi(t)$ *bewegt.*

Folgt aus dem vorigen Satze.

267. Nach diesen Vorbereitungen wollen wir zeigen:

*Wenn zweien Stellen*

$$t=\bar{\tau} \text{ und } t=\bar{\bar{\tau}}$$
$$(\bar{\tau}<\bar{\bar{\tau}}),$$

*an denen sich* $\chi(t)$ *bewegt, und die zum Intervall* $t_0t'$ *gehören, zwei verschiedene Punkte* $\gamma$ *und* $\delta$ *unserer auf* $E$ *fallenden Linie* $\mathfrak{A}$ *entsprechen, und die Strecke* $\overline{\gamma\delta}$ *nicht ganz zu* $E$ *gehört, sondern, abgesehen von den End-*

*punkten, im Innern von E liegt, so fällt der Punkt*

$$L(t') \equiv \bar{X}' + i\bar{Y}$$

*unter der Voraussetzung*

$$\chi(t_0) = 1$$

*sicher innerhalb und nicht auf E, unter der Voraussetzung*

$$\chi(t_0) > 0$$

*sicher innerhalb und nicht auf das Oval $\chi(t_0) \cdot E$.*

268. Der Beweis dieses Satzes wird uns bis Absatz 290 inkl. beschäftigen. Wir werden dabei mehrfach Figuren zu Hilfe ziehen, aber besondere Sorge tragen müssen, zu zeigen, daß wir unsere Schlüsse nicht etwa auf unwesentliche zufällige Eigenschaften der Figur stützen, wozu wir uns in der Tat leicht verleiten lassen könnten. Dies verursacht umständliche Darlegungen, durch deren Weglassung die Beweise an Kürze und Übersichtlichkeit wohl gewinnen, für den kritischen Leser aber ihre Überzeugungskraft einbüßen würden.

$\left.\begin{matrix} W_1, W_2 \\ V_1, V_2 \end{matrix}\right\}$ seien die beiden Geraden parallel $\overline{\gamma\delta}$ im Abstand $\left\{\begin{matrix} p \\ p+w \end{matrix}\right.$

(vgl. Figur 7)*)

und es sei

$$p, w > 0. \tag{245.}$$

Außerdem seien $p$ und $w$ so klein gewählt, daß $W_1$, $W_2$, $V_1$, $V_2$ ins Innere von $E$ eindringen. Solche Wahl ist immer möglich, da die Gerade $\gamma\delta$ ins Innere von $E$ eindringt.

$\left.\begin{matrix} \overline{g_1 h_1} \\ \overline{g_2 h_2} \\ \overline{\gamma_1 \delta_1} \\ \overline{\gamma_2 \delta_2} \end{matrix}\right\}$ seien die zu $\overline{\gamma\delta}$ parallelen und gleichgerichteten $E$-Sehnen auf $\left\{\begin{matrix} W_1 \\ W_2 \\ V_1 \\ V_2 \end{matrix}\right.$

---

*) Aus Gründen, auf die es hier nicht ankommt, ist das Oval $E$ in den folgenden Figuren nicht immer gleich gezeichnet; da unser Beweis sich auf beliebig gestaltete Ovale bezieht, ist hiermit kein Nachteil verbunden.

die sämtlich eine Länge $>0$ haben. Die Geraden

$$\gamma_1\gamma_2 \equiv A$$
$$\delta_1\delta_2 \equiv B$$

sind sicher verschieden. Denn wenn die vier verschiedenen $E$-Punkte $\gamma_1, \gamma_2, \delta_1, \delta_2$ auf *einer* Geraden $G$ lägen, und unter $\alpha_1, \alpha_2$ die beiden äußersten dieser vier Punkte verstanden würden, müßte $G$ die ganze Sehne $\overline{\alpha_1\alpha_2}$ mit $E$ gemein haben, auf ihr die Punkte $\gamma, \delta$ und könnte nicht ins Innere von $E$ eindringen, im Widerspruch zu 267, wonach die Gerade $\gamma\delta$ ins Innere von $E$ eindringt.

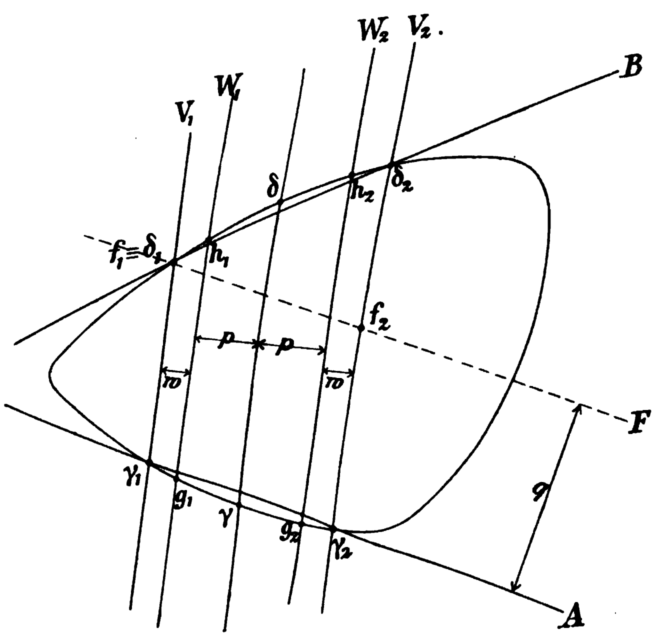



Fig. 7.

Ferner sei (vgl. Fig. 7) die Gerade

$$F \parallel A$$

und gehe durch den näher bei $A$ liegenden der Punkte $\delta_1$, $\delta_2$, bezw. durch beide, wenn sie gleich weit von $A$ abliegen.

$$F \text{ schneide } \begin{Bmatrix} V_1 \\ V_2 \end{Bmatrix} \text{ in } \begin{Bmatrix} f_1 \\ f_2 \end{Bmatrix}, \text{ wobei notwendig } \begin{Bmatrix} f_1 \equiv \delta_1 \\ \text{oder} \\ f_2 \equiv \delta_2 \end{Bmatrix} \text{ ist.}$$

Offenbar ist dann

$$\text{(246.)} \qquad \text{Entf.}(AF) \equiv q > 0$$

und $\gamma_1\gamma_2 f_2 f_1$ ein Parallelogramm mit den nichtverschwindenden Seitenabständen $q, 2(p+w)$.

269. Wir sind genötigt, unserem Beweis noch einige weitere Vorbereitungen vorauszuschicken, weil $\mathfrak{A}$ die Ovallinie nicht einfach zu bedecken braucht (vgl. 263), sondern beliebig auf $E$ hin- und herlaufen darf und infolgedessen keine die Verhältnisse erschöpfend andeutende einfache Figur gezeichnet werden kann.

Wir bestimmen:

$\bar{t}$ und $\bar{T}$, $\bar{\bar{t}}$ und $\bar{\bar{T}}$ seien irgendwelche, den folgenden Bedingungen genügende Werte:

$$(247.)\qquad \left.\begin{array}{l} t_0 \leqq \bar{t} \underset{(=)}{\leqq} \bar{\tau} < \bar{T} \\ \bar{\bar{T}} < \bar{\bar{\tau}} \underset{(=)}{\leqq} \bar{\bar{t}} \leqq t' \end{array}\right\}; \; A(t) \text{ zu } \left\{\begin{array}{c} \widehat{g_1 \gamma g_2} \\ \widehat{h_1 \delta h_2} \end{array}\right\} \text{ gehörig für } \left\{\begin{array}{l} \bar{t} \leqq t \leqq \bar{T} \\ \bar{\bar{T}} \leqq t \leqq \bar{\bar{t}} \end{array}\right.$$

Die eingeklammerten Gleichheitszeichen sind nur in dem Fall zulässig, daß

$\left.\begin{array}{l}\bar{\tau}\\ \bar{\bar{\tau}}\end{array}\right\}$ nicht nur als Werte, sondern auch als bewegte Stellen im Sinn der Definition bei 264 zu den Intervallen $\left\{\begin{array}{l}\bar{t}\,\bar{T}\\ \bar{\bar{T}}\,\bar{\bar{t}}\end{array}\right\}$ gehören,

wie das ja eintreten kann, und sicher immer dann eintreten wird, wenn

$$t_0 = \bar{t} = \bar{\tau},$$
$$\bar{\bar{\tau}} = \bar{\bar{t}} = t'$$

ist. — Solche Werte $\bar{t}$, $\bar{T}$, $\bar{\bar{t}}$, $\bar{\bar{T}}$ sind immer vorhanden; man kann nämlich beim Übergang von $t_0$ nach $t'$ die Werte $\bar{\tau}$ und $\bar{\bar{\tau}}$ weder erreichen noch verlassen, ohne in $A(t)$ Punkte der Bögen $\widehat{g_1 g_2}$, resp. $\widehat{h_1 h_2}$ zu erhalten; denn $A(t)$ ist eine stetige Funktion von $t$, und die Punkte

$$A(\bar{\tau}) \equiv \gamma, \quad A(\bar{\bar{\tau}}) \equiv \delta$$

liegen nach unserer Konstruktion im Innern der von einander getrennten Bögen $\widehat{g_1 g_2}$ und $\widehat{h_1 h_2}$ resp.

270. Aus der getrennten Lage dieser Bögen und aus $\bar{\tau} < \bar{\bar{\tau}}$ (vgl. 267) folgt auch noch

$$(247\text{a.})\qquad \bar{T} < \bar{\bar{T}},$$

sowie, daß die Punkte

$$(248.)\qquad A(t), \; \bar{t} \leqq t \leqq \bar{T}$$

verschieden sind von den Punkten

$$(249.)\qquad A(t), \; \bar{\bar{T}} \leqq t \leqq \bar{\bar{t}}.$$

Die beiden eben gekennzeichneten Intervalle sind es, auf welche sich unsere folgenden Erörterungen beziehen werden.

271. Wir teilen das gesamte $t$-Intervall wieder wie bei 202 durch die Werte

$$t_0 < t_1 < t_2 < \ldots < t_n \equiv t'.$$

Zu dem Teilintervall $\bar{t}\,\bar{T}$ unseres Hauptintervalles $t_0\,t'$ mögen die Werte

$$t_m < t_{m+1} < t_{m+2} < \cdots < t_{m+k},$$

zum Teilintervall $\overline{\overline{T}}\,\overline{\overline{t}}$ die Werte

$$t_\eta < t_{\eta+1} < t_{\eta+2} < \cdots < t_{\eta+\zeta}$$

gehören, wobei infolge von (247.) uud (247a.)

$$t_{m+k} < t_\eta$$

ist. Dabei sei die Teilung, was ja möglich ist, bereits so eingerichtet, daß

$$(250.)\quad \begin{aligned} &t_m < \bar{\tau} < t_{m+k}, \text{ bezw. } t_m = \bar{\tau}, \text{ wenn } \bar{\tau} = \bar{t}, \\ &t_\eta < \overline{\overline{\tau}} < t_{\eta+\zeta}, \text{ bezw. } \overline{\overline{\tau}} = t_{\eta+\zeta}, \text{ wenn } \overline{\overline{\tau}} = \overline{\overline{t}}, \end{aligned}$$

und also

$$(251.)\quad \begin{aligned} &\chi(t_m) - \chi(t_{m+k}) \equiv f_m - f_{m+k} > 0 \\ &\chi(t_\eta) - \chi(t_{\eta+\zeta}) \equiv f_\eta - f_{\eta+\zeta} > 0 \end{aligned}$$

ist, vgl. (243.).

272. Wir haben nun die zu unseren $t$-Werten gehörigen Punkte

$$A_m \equiv \int_{t=t_0}^{t=t_m} g\,dz \equiv (0, m)$$

der Linie $\mathfrak{A}$ und, zunächst unter der Voraussetzung

$$f_0 \equiv \chi(t_0) = 1,$$

die entsprechenden der Linie $L(t)$

$$L_m \equiv \int_{t=t_0}^{t=t_m} f g\,dz$$

in Betracht zu ziehen; an Stelle der letzteren aber treten (vgl. 205) zunächst die ihnen nahekommenden Punkte

$$J_m \equiv \sum_1^m{}_\nu\, f_\nu \int_{t=t_{\nu-1}}^{t=t_\nu} g\,dz \equiv (m, m), \qquad \text{vgl. (163.).}$$

273. Wir wissen nun: Die Punkte

$$A_m,\ A_{m+1},\ A_{m+2}, \ldots A_{m+k}$$

oder

$$(0, m), (0, m+1), (0, m+2) \dots (0, m+k)$$

gehören alle zum Bogen $g_1 g_2$, die Punkte

$$A_\eta, A_{\eta+1}, A_{\eta+2} \dots A_{\eta+\zeta}$$

oder

$$(0, \eta), (0, \eta+1), (0, \eta+2) \dots (0, \eta+\zeta)$$

alle zum Bogen $h_1 h_2$. Aus der Zeile

$$(0\,0)(0\,1)(0\,2)\dots$$

des vollständigen Schemas lassen wir, wie bei 27, bezw. (175.) alle folgenden Zeilen durch sukzessive Projektion entstehen zunächst bis zur Zeile

(252.) $(m, m), (m, m+1) \dots (m, m+k) \dots\dots (m, \eta), (m, \eta+1) \dots (m, \eta+\zeta) \dots\dots$

274. Dann ist nach 27 das mittransformierte $E$ samt allen seinen Teilen und Hilfslinien in eine ähnliche, ähnlich gelegene Figur übergegangen, bestehend aus einem Oval $E^{(m)}$ mit Teilen und Hilfslinien, deren Bezeichnungen alle ebenfalls den oberen Index $(m)$ erhalten, und mit Längendimensionen, welche aus denen der Figur $E$ durch Multiplikation mit $f_m$ hervorgehen; $\widehat{g_1 g_2}$ z. B. geht in $\widehat{g_1^{(m)} g_2^{(m)}}$, $\widehat{h_1 h_2}$ in $\widehat{h_1^{(m)} h_2^{(m)}}$, $q$ geht in $f_m \cdot q$, $w$ in $f_m \cdot w$ über, usw.

Die Punkte

(253.) $(m, m), (m, m+1), (m, m+2, \dots (m, m+k)$

liegen dann auf $\widehat{g_1^{(m)} g_2^{(m)}}$, die Punkte

(254.) $(m, \eta), (m, \eta+1), (m, \eta+2) \dots (m, \eta+\zeta)$

auf $\widehat{h_1^{(m)} h_2^{(m)}}$.

275. *Hilfssatz zum Beweis von 267.*

*Wir wollen zeigen, daß die auf dem Bogen $h_1 \delta h_2$ gelegenen Teilpunkte*

(255.) $(m+k, \eta), (m+k, \eta+1), (m+k, \eta+2) \dots (m+k, \eta+\zeta)$

*von $E^{(m)}$ und somit auch von $E$ weiter entfernt sind als eine angebbare endliche Größe, welche von der Anzahl und Engigkeit der auf $\mathfrak{A}$, bezw. im Integrationsintervall angenommenen Teilstellen völlig unabhängig ist.*

Dieser Nachweis wird mit 288 vollendet sein; von da aus ist dann mittels früherer Ergebnisse der Beweis der Behauptung 267 leicht zu erreichen, wie Absatz 289 zeigen wird.

276. Da wir uns aber jetzt eine Zeitlang ausschließlich in der Figur $E^{(m)}$ mit ihrem Zubehör bewegen, so werden wir zur Erleichterung der Schreibung die oberen Indizes $(m)$ weglassen, bis zu einem Zeitpunkt, wo ihre Wiedereinführung ausdrücklich vermerkt wird, bei (305.).

277. Indem wir dann der Kürze halber

$$(256.)\qquad \left.\begin{matrix} h \\ h^* \end{matrix}\right\} \text{ als Repräsentanten der } \left\{\begin{matrix} (m,\, \eta+\iota) \\ (m+k,\, \eta+\iota) \end{matrix}\right. \qquad (\iota=0,1,2,\ldots\zeta)$$

setzen, wollen wir zeigen, daß

$$(257.)\qquad h^* \text{ von } \left\{\begin{matrix} h \\ \widehat{(h)\, h_1\, \gamma_1},\ \widehat{(h)\, h_2\, \gamma_2} \\ \widehat{\gamma_1\, g_1\, g_2\, \gamma_2} \end{matrix}\right\} \text{ weiter entfernt als die endliche Größe } \left\{\begin{matrix} A \\ B \\ \Gamma \end{matrix}\right.$$

ist; da aber — vergleiche Fig. 10 —

$$(258.)\qquad E \text{ aus } \left\{\begin{matrix} h \\ \widehat{(h)\, h_1\, (\gamma_1)},\ \widehat{(h)\, h_2\, (\gamma_2)} \\ \widehat{\gamma_1\, g_1\, g_2\, \gamma_2} \end{matrix}\right\} \text{ zusammengesetzt}$$

ist, so wird dann 275 bewiesen und gezeigt sein, daß

$$(259.)\qquad \text{Entf.}\,(h^*, E) > \Delta$$

($\Delta$ die kleinste unter $A, B, \Gamma$ vertretene Größe).

Das Symbol $\widehat{(h)\, h_1\, \gamma_1}$ bedeutet Bogen $\widehat{h\, h_1\, \gamma_1}$ mit Ausschluß des Punktes $h$, usw.

*Aufsuchung der Größe $A$.*

278. Es ist:

$$\overline{(m,\, \eta+\iota)\,(m+1,\, \eta+\iota)} = \overline{(m,\, m)\,(m,\, \eta+\iota)} \cdot \left(1 - \frac{f_{m+1}}{f_m}\right) \geqq q\,(f_m - f_{m+1})$$

$$(\text{weil } \overline{(m\, m)\,(m,\, \eta+\iota)} \geqq f_m\, q)$$

$$\overline{(m+1,\, \eta+\iota)\,(m+2,\, \eta+\iota)} = \overline{(m+1,\, m+1)\,(m+1,\, \eta+\iota)} \cdot \left(1 - \frac{f_{m+2}}{f_{m+1}}\right)$$

$$= \overline{(m,\, m+1)\,(m,\, \eta+\iota)} \cdot \frac{f_{m+1}}{f_m}\left(1 - \frac{f_{m+2}}{f_{m+1}}\right)$$

$$= \overline{(m,\, m+1)\,(m,\, \eta+\iota)} \cdot \frac{f_{m+1} - f_{m+2}}{f_m} \geqq q\,(f_{m+1} - f_{m+2}).$$

Ähnlich ist

$$\overline{(m+2,\eta+\iota)\,(m+3,\eta+\iota)} = \overline{(m,m+2)\,(m,\eta+\iota)}\,\frac{f_{m+2}}{f_m}\left(1-\frac{f_{m+3}}{f_{m+2}}\right)$$

$$= \overline{(m,m+2)\,(m,\eta+\iota)}\,\frac{f_{m+2}-f_{m+3}}{f_m} \geqq q(f_{m+2}-f_{m+3})$$

$$\vdots \qquad\qquad \vdots$$

Endlich ist:

$$\overline{(m+k-1,\eta+\iota)\,(m+k,\eta+\iota)} = \overline{(m,m+k-1)\,(m,\eta+\iota)}\,\frac{f_{m+k-1}-f_{m+k}}{f_m}$$

$$\geqq q(f_{m+k-1}-f_{m+k}).$$

Durch Addition erhält man:

$$(260.)\qquad \sum_{1}^{k}{}_{j}\,\overline{(m+j-1,\eta+\iota)\,(m+j,\eta+\iota)} \geqq q\,(f_m-f_{m+k})$$

$$(\iota=1,2\ldots\zeta)$$

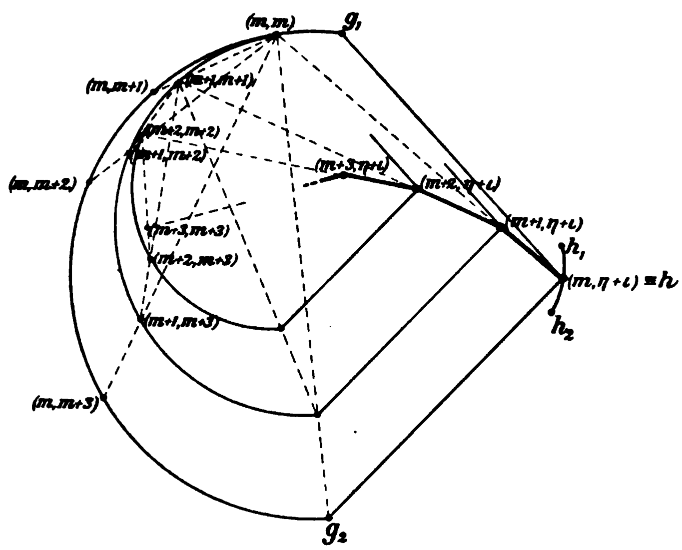



Fig. 8.*)

Diese Summe entspricht der Länge der starken schwarzen gebrochenen Linie in Fig. 8. Um eine auf die Entfernung der Endpunkte dieser Linie bezügliche Ungleichung aus (260.) abzuleiten, dient folgender Hilfssatz:

279. *Hilfssatz. Vgl. Fig. 9.*

*$g_1 h_0 g_2$ sei ein Winkel von der Größe $\varphi < \pi$,*

---

*) Um die Figur nicht zu verwirren, sind die zwei inneren Bögen in ihren oberen Hälften nicht so weit gezeichnet, wie es dem äußersten Bogen entsprechen würde.

*$q_j (j=1, 2, 3 \ldots k)$ seien Punkte des Winkels $g_1 h_0 g_2$*).*

*$\overline{h_{j-1} h_j}$ sei parallel, gleich und gleich gerichtet $\overline{h_0 q_j}$.*

Dann ist:

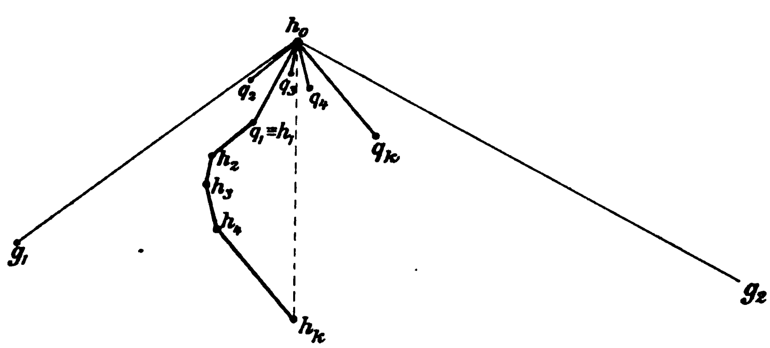
$$\overline{h_0 h_k} \geqq \cos\frac{\varphi}{2} \sum_1^k{}_j \overline{h_{j-1} h_j}.\text{**)}$$

280. Beweis. Betrachtet man $h_0 g_1$ und $h_0 g_2$ als positive Koordinatenhalbachsen, so hat jedes $q_j$ zwei positive, höchstens verschwindende Koordinaten $x_j$, $y_j$. Die offenbar auch positiven, höchstens verschwindenden Koordinaten des Punktes $h_k$ — welcher somit sicher auch zu dem Winkel $g_1 h_0 g_2$ gehört – sind

$$x = \sum_1^k{}_j x_j, \quad y = \sum_1^k{}_j y_j.$$

Somit ist

$$x + y = \Sigma(x_j + y_j).$$




*(k ist der Bestimmtheit der Zeichnung wegen speciell gleich 5 gesetzt.)*

Fig. 9.

Sieht man in dieser Gleichung $x$, $y$ als laufende Koordinaten an, so bedeutet sie eine Gerade $G$ senkrecht zur Halbiergeraden des Winkels und es ist:

$$\text{Entf.}(h_0 G) = \cos\frac{\varphi}{2} \Sigma(x_j + y_j).$$

---

*) D. h. sie seien innerhalb des Winkels oder auf seinen Schenkeln gelegen; der Scheitelwinkel von $g_1 h_0 g_2$ wird *nicht* mit zum Winkel gerechnet.

**) Ein besonderer Fall dieses Satzes ist der folgende:

$$\left|\sum_1^n{}_j (a_j + b_j i)\right| \geqq \sum_1^n{}_j \sqrt{a_j^2 + b_j^2} : \sqrt{2}$$

($i$ die imag. Einheit, die Wurzeln positiv)

welcher gilt, wenn sowohl alle $a_j$ gleiches Zeichen, als alle $b_j$ gleiches Zeichen haben.

Somit ist, weil $h_k$ auf $G$ liegt

$$\overline{h_0 h_k} \geqq \cos\frac{\varphi}{2}\,\Sigma(x_j + y_j).$$

Da aber, weil die Summe zweier Dreiecksseiten nie kleiner als die dritte Seite,

$$\Sigma(x_j + y_j) \geqq \Sigma\,\overline{h_0 q_j}$$

und weil ferner

$$\Sigma\,\overline{h_0 q_j} = \Sigma\,\overline{h_{j-1} h_j}$$

ist, so gilt der Satz

$$\overline{h_0 h_k} \geqq \cos\frac{\varphi}{2}\,\Sigma\,\overline{h_{j-1} h_j}$$

den wir ableiten wollten.

281. Man darf nun an Stelle

$$\text{von} \begin{Bmatrix} \sphericalangle g_1 h_0 g_2 \\ h_j \end{Bmatrix} \text{ setzen } \begin{Bmatrix} \sphericalangle g_1 (m,\ \eta + \iota) g_2 \equiv \varphi_{\eta+\iota} < \pi^{*)} \\ (m + j,\ \eta + \iota) \end{Bmatrix}$$

Daß dann die $q_j$, wie oben verlangt, zu $\sphericalangle g_1(m, \eta + \iota) g_2$ gehören, folgt daraus, daß $(m + j,\ \eta + \iota)$ zu $\sphericalangle g_1^{(j-1)}(m + j - 1,\ \eta + \iota) g_2^{(j-1)}$, dieser Winkel aber zu $\sphericalangle g_1(m, \eta + \iota) g_2$ gehört und mit ihm parallele gleichgerichtete Schenkel hat. Der Hilfssatz 279 geht durch die obige Einsetzung über in

$$(261.)\quad \overline{(m,\ \eta + \iota)\,(m + k,\ \eta + \iota)} \geqq \cos\frac{\varphi_{\eta+\iota}}{2} \sum_1^k{}_j\, \overline{(m + j - 1,\ \eta + \iota)\,(m + j,\ \eta + \iota)}$$

und ergibt zusammen mit (260.) den Satz

$$(262.)\qquad \overline{(m,\ \eta + \iota)\cdot(m + k,\ \eta + \iota)} \geqq \cos\frac{\varphi_{\eta+\iota}}{2}\cdot q(f_m - f_{m+k}).$$

Aber es ist

$$(263.)\qquad \frac{\varphi_{\eta+\iota}}{2} \leqq \operatorname{arctg}\frac{g_1 g_2}{2 f_m q} = \arccos\frac{f_m q}{\sqrt{\left(\frac{g_1 g_2}{2}\right)^2 + f_m^2 q^2}},$$

also

$$(264.)\qquad \cos\frac{\varphi_{\eta+\iota}}{2} \geqq \frac{q}{\sqrt{\left(\frac{g_1 g_2}{2 f_m}\right)^2 + q^2}} \geqq \frac{q}{\sqrt{\left(\frac{f_m D}{2 f_m}\right)^2 + q^2}},$$

*) Durch 3 Punkte angegebene Winkel sind immer als innere Winkel des Dreiecks der 3 Punkte und positiv aufzufassen.

wo $D$ den Durchmesser eines Kreisgebietes bezeichnet, dem das Ovalgebiet $\mathfrak{E}$ — hier meinen wir $\mathfrak{E}$ im ursprünglichen Sinne, nicht im Sinne von $\mathfrak{E}^{(m)}$ — völlig als Teil angehört; so kommt schließlich:

$$(265.)\qquad \overline{(m,\eta+\iota)(m+k,\eta+\iota)} \geqq \frac{q^2(f_m-f_{m+k})}{\sqrt{\left(\frac{g_1g_2}{2f_m}\right)^2+q^2}} \geqq \frac{q^2(f_m-f_{m+k})}{\sqrt{\left(\frac{D}{2}\right)^2+q^2}} > 0$$
$$(\iota=0,1,2,3\ldots,\zeta).$$

Da $q<D$ und $f_m\leqq 1$ ist, gilt auch

$$(266.)\qquad \overline{(m,\eta+\iota)(m+k,\eta+\iota)} > \frac{2}{\sqrt{5}}(f_m-f_{m+k})\frac{q^2}{D} > 0$$

und da bei (285.) die positive Größe $\mathfrak{d}<q$ gesetzt werden wird, unter Einführung der abkürzenden Bezeichnung (256.)

$$(267.)\qquad \overline{hh^*} > \frac{2}{\sqrt{5}}(f_m-f_{m+k})\frac{\mathfrak{d}^2}{D} > 0.$$

Wir können also die bei (257.) geforderte Größe $A$ wie folgt annehmen:

$$(268.)\qquad A=\frac{2}{\sqrt{5}}(f_m-f_{m+k})\frac{q^2}{D},$$

oder

$$(268a.)\qquad A=\frac{2}{\sqrt{5}}(f_m-f_{m+k})\frac{\mathfrak{d}^2}{D}.$$

*Aufsuchung der Größe B.*

282. Wir zeigen zunächst:

$$(269.)\qquad \sphericalangle g_1h\gamma_1\equiv\chi_1>0;\quad \sphericalangle g_2h\gamma_2\equiv\chi_2>0.$$

Es genügt, die erste der beiden Ungleichungen zu erweisen.

$G$ sei die Gerade $g_1\gamma_1$, vgl. Fig. 10.*)

$\left.\begin{matrix}C_1\\C_2\end{matrix}\right\}$ seien die von den Punkten $\left\{\begin{matrix}\gamma_1\\\gamma_2\end{matrix}\right\}$ gegen $F$ laufenden Hälften von $\left\{\begin{matrix}V_1\\V_2\end{matrix}\right.$;

$R$ sei das von $\overline{\gamma_1\gamma_2}$, $C_1$ und $C_2$ begrenzte, $h$ enthaltende Stück der Ebene. $G$ enthält außer $\gamma_1$ entweder keinen Punkt der Strecke $\overline{\gamma_1\gamma_2}$, oder alle.

*) In Fig. 10 ist $B$ parallel zu $A$ angenommen, was ja gelegentlich eintreten kann, und fällt deshalb mit $F$ zusammen.

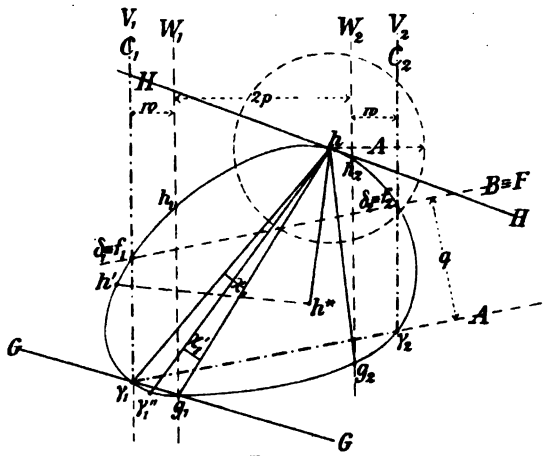


Fig. 10.

$G$ dringt nicht in $R$ ein, wenn es außer $\gamma_1$ keinen Punkt von $\overline{\gamma_1\gamma_2}$ enthält; weil nämlich dann $g_1$ auf einer andern Seite von $A$ liegt wie $h$, und weil $g_1$ und $h$ zwischen $V_1$ und $V_2$ gelegen sind, so könnte $G$ in $R$ nur eindringen über einen von $\gamma_1$ und $\gamma_2$ verschiedenen Punkt von $\overline{\gamma_1\gamma_2}$.

$G$ dringt nicht in $R$ ein, wenn es alle Punkte von $\overline{\gamma_1\gamma_2}$ enthält.

$G$ dringt somit keinesfalls in $R$ ein.

$u$, der Fußpunkt der von $h$ auf $G$ gefällten Normale, liegt also außerhalb $R$, höchstens auf dem Rande, und es ist

(270.) $$\text{Entf.}(h, G) \geqq f_m \varepsilon,$$

($\varepsilon$ die kleinere der beiden Größen $w, q$ oder ihr gemeinsamer Wert)

denn eine

Strecke von $h$ bis zum Rande $\left\{\begin{matrix} C_1, C_2 \\ \overline{\gamma_1\gamma_2} \end{matrix}\right\}$ hat mindestens die Länge $\left\{\begin{matrix} f_m w \\ f_m q \end{matrix}\right\}$.

Aber es ist andererseits

(271.) $$\overline{h\gamma_1} \leqq f_m D$$

($D$ wie bei (264.) zu verstehen).

Schließlich ist

(272.) $$\overline{\gamma_1 g_1} \geqq f_m \cdot w.$$

283. Konstruiert man nun — vgl. Fig. 11 und 12 — einen Winkel

$$\chi_1' \equiv \sphericalangle g_1 h' \gamma_1'$$

wobei

$$\left|\begin{array}{c} \gamma_1' \text{ auf } \overline{g_1\gamma_1},\quad \overline{g_1\gamma_1'} = f_m \cdot w, \\ h' \text{ der } g_1 \text{ nähere Schnitt*) von } K \text{ und } G' \text{ (ev. der Berührpunkt)}, \\ K \text{ Kreis mit } f_m D \text{ um } \gamma_1' \text{ geschlagen}, \\ G' \text{ Parallele zu } G \text{ im Abstand } f_m \cdot \varepsilon \text{ von } G, \end{array}\right.$$

*) Der andere liegt um mehr als $f_m \cdot D$ von $g_1$ entfernt, was für Punkte $h', g_1$ von $E$ (recte $E^{(m)}$) unmöglich ist.

so ist $\chi_1'$ offenbar der kleinste Winkel, der mit den für $\chi_1$ bei (270.), (271.), (272.) gegebenen Bedingungen verträglich ist, und es wird

$$(273.)\qquad \sphericalangle g_1 h \gamma_1 \equiv \chi_1 \geqq \chi_1' \equiv \sphericalangle g_1 h' \gamma_1'.$$

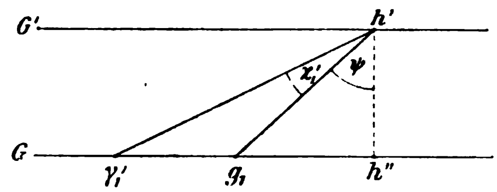


Fig. 11.

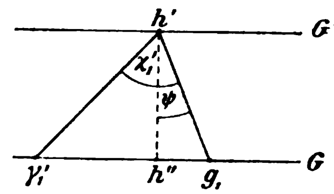


Fig. 12.

284. Es gelten aber, wenn

$\begin{cases} h'' \text{ Fußpunkt der von } h' \text{ auf } G \text{ gefällten Senkrechten,} \\ \psi \text{ Abkürzung für den } \textit{stets positiv} \text{ gemeinten } \sphericalangle g_1 h' h'' \end{cases}$

ist, die Gleichungen*):

$$(274.)\qquad \mathrm{tg}\,\chi_1' = \mathrm{tg}\,(\chi_1' \pm \psi \mp \psi) = \frac{\mathrm{tg}(\chi_1' \pm \psi) \mp \mathrm{tg}\,\psi}{1 \pm \mathrm{tg}(\chi_1' \pm \psi)\,\mathrm{tg}\,\psi}.$$

$$(275.)\ \mathrm{tg}\,\chi_1' = \frac{\sqrt{D^2-\varepsilon^2} : \varepsilon \mp (\pm\sqrt{D^2-\varepsilon^2} \mp w) : \varepsilon}{1 \pm [\pm(D^2-\varepsilon^2) \mp w\sqrt{D^2-\varepsilon^2}] : \varepsilon^2} = \frac{\varepsilon w}{D^2 - w\sqrt{D^2-\varepsilon^2}}.$$

[Die $\begin{Bmatrix}\text{oberen}\\ \text{unteren}\end{Bmatrix}$ Zeichen sind zu nehmen, wenn $h''$ $\begin{Bmatrix}\text{außerhalb}\\ \text{innerhalb}\end{Bmatrix}$ $\overline{g_1\gamma_1'}$ fällt, das Resultat gilt offenbar auch, wenn $h''$ auf $g_1$ fällt.]

oder, da

$$\varepsilon \leqq w, \text{ vgl. (270.)}, \ D > 2w > \varepsilon;$$

die Ungleichungen

$$(276.)\ \mathrm{tg}\,\chi_1' \geqq \frac{\varepsilon^2}{D^2 - \varepsilon\sqrt{D^2-\varepsilon^2}} = \frac{1}{\left(\frac{D}{\varepsilon}\right)^2 - \sqrt{\left(\frac{D}{\varepsilon}\right)^2 - 1}} > \frac{\varepsilon^2}{D^2} > 0.$$

Hieraus folgt:

$$(277.)\qquad \chi_1' > \mathrm{arctg}\,\frac{\varepsilon^2}{D^2} \equiv \chi_1'' \equiv \arcsin\frac{\varepsilon^2}{\sqrt{\varepsilon^4 + D^4}} > 0,$$

wobei die Winkel im *ersten Quadranten* zu nehmen sind, denn es ist ja doch

$$(278.)\qquad \overline{\gamma_1' g_1} = f_m \cdot w < f_m \cdot D = \overline{\gamma_1' h'}$$

*) Eine Verwechslung des Winkels $\psi$ und unserer früher vorgekommenen Funktion $\psi(t)$ ist wohl nicht zu fürchten.

und, weil der größeren Dreiecksseite der größere Winkel gegenüber liegt,

$$(279.)\qquad \begin{cases} \sphericalangle \gamma_1' h' g_1 < \sphericalangle \gamma_1' g_1 h' \\ \sphericalangle \gamma_1' h' g_1 < \dfrac{\sphericalangle \gamma_1' h' g_1 + \sphericalangle \gamma_1' g_1 h'}{2} \\ \sphericalangle \gamma_1' h' g_1 < \dfrac{\pi}{2} \end{cases}$$

oder

$$\chi_1' < \frac{\pi}{2},$$

d. h. ein Winkel im ersten Quadranten ist. Aus (277.) folgt mittels (273.)

$$(280\text{a.})\qquad \chi_1 > \operatorname{arctg} \frac{\varepsilon^2}{D^2} \text{ im ersten Quadranten} > 0,$$

analog würde man erhalten

$$(280\text{b.})\qquad \chi_2 > \operatorname{arctg} \frac{\varepsilon^2}{D^2} \text{ im ersten Quadranten} > 0,$$

womit wir das bei 282 zunächst gesteckte Ziel erreicht haben.

285. Offenbar wird nun erstens, wenn $H$ die bezw. eine Stützgerade von $E$ durch $h$ bedeutet:

$\widehat{(h)h_1\gamma_1}$, $\sphericalangle g_1 h \gamma_1$, $\sphericalangle g_1 h g_2$ auf *einer* Seite von $H$,
höchstens teilweise *auf* $H$

liegen. Zweitens wird auf dieser Seite von $H$

$\widehat{(h)h_1\gamma_1}$ durch $\sphericalangle g_1 h \gamma_1$ getrennt von $\sphericalangle g_1 h g_2$,

$\widehat{(h)h_1\gamma_1}$ durch $\sphericalangle g_1 h \gamma_1''$ getrennt von $\sphericalangle g_1 h g_2$,

wenn $h\gamma_1''$ ein beliebiger von $h$ auslaufender, zu $\sphericalangle g_1 h \gamma_1$ gehöriger Halbstrahl ist; vgl. Fig. 10.

Die beiden Umstände zusammengenommen versichern uns, wenn $h^*$ ein Punkt des Winkels $g_1 h g_2$, $h'$ einer des Bogens $\widehat{(h)h_1\gamma_1}$ ist:

$$(281.)\qquad \overline{h^* h'} \text{ schneidet oder erreicht } h\gamma_1''.$$

Man kann nun den Punkt $h^*$ in dem Sinne wie bei (256.) und (257.) verstehen, so daß er (vgl. 281.) außerhalb des mit $A$ um $h$ geschlagenen

Kreises liegt, $h\gamma_1''$ aber in Anbetracht seiner Definition und (273.) so wählen, daß

$$\sphericalangle g_1 h \gamma_1'' = \chi_1' = \sphericalangle g_1 h' \gamma_1' \tag{282.}$$

wird. Dann wird, wenn

$$\sphericalangle h^* h \gamma_1'' < \frac{\pi}{2}$$

ist,

$$h^* h' \geqq \text{Entf.}(h^*, h\gamma_1'') > A \sin \sphericalangle h^* h \gamma_1'' \geqq A \sin \sphericalangle g_1 h \gamma_1'' = A \sin \chi_1' \tag{283.}$$

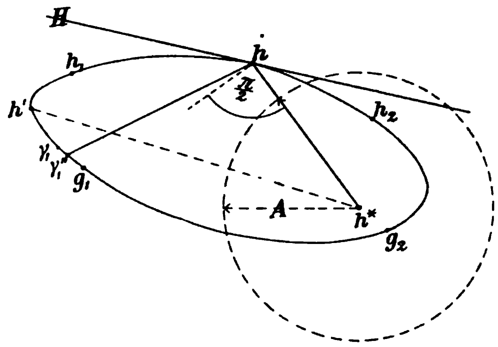



*Fig. 13.*

sein; wenn aber — vergleiche Fig. 13 —

$$\sphericalangle h^* h \gamma_1'' \geqq \frac{\pi}{2}$$

ist, so muß offenbar

$$\overline{h^* h'} > A \tag{283a.}$$

sein. Unter allen Umständen ist also

$$\overline{h^* h'} > A \sin \chi_1' > A \frac{\varepsilon^2}{\sqrt{\varepsilon^4 + D^4}} > \frac{A}{\sqrt{2}} \frac{\varepsilon^2}{D^2} > \frac{A}{\sqrt{2}} \frac{\mathfrak{d}^2}{D^2}, \tag{284.}$$

wenn

$$0 < \mathfrak{d} < \varepsilon \tag{285.}$$

angenommen wird, und schließlich ergibt sich durch Einführung des Wertes $A$ von (268a.):

$$\text{Entf.}(h^*, \widehat{(h) h_1 \gamma_1}) > \sqrt{\frac{2}{5}} (f_m - f_{m+k}) \frac{\mathfrak{d}^4}{D^3} > 0. \tag{286.}$$

Die Ungleichung

$$\text{Entf.}(h^*, \widehat{(h) h_2 \gamma_2}) > \sqrt{\frac{2}{5}} (f_m - f_{m+k}) \frac{\mathfrak{d}^4}{D^3} > 0 \tag{286a.}$$

wird auf die nämliche Weise abgeleitet. Wir können also die bei (257.) geforderte Größe $B$ wie folgt annehmen:

$$B = \sqrt{\frac{2}{5}} (f_m - f_{m+k}) \frac{\mathfrak{d}^4}{D^3}. \tag{287.}$$

*Aufsuchung der Größe $\Gamma$.*

286. Es ist — vgl. Fig. 14 — der Sektor

$$H^* \equiv \overline{h^* \gamma_1^*}\,\widehat{\gamma_1^* \gamma_2^*}\,\overline{\gamma_2^* h^*} \left\{\begin{matrix}\text{ähnlich zu}\\ \text{gehörig zu}\end{matrix}\right\} \overline{h \gamma_1}\,\widehat{\gamma_1 \gamma_2}\,\overline{\gamma_2 h} \equiv H \tag{288.}$$

und

Strahl $h h^*$, sich entsprechend in $H, H^*$, schneidet $\left\{\begin{matrix} \frown{\gamma_1 \gamma_2} \\ \frown{\gamma_1^* \gamma_2^*} \end{matrix}\right\}$ in $\left\{\begin{matrix} s \\ s^* \end{matrix}\right.$

Dabei ist

$$(289.)\quad \left.\begin{matrix} \overline{h^* \gamma_1^*} \\ \overline{h^* \gamma_2^*} \\ \overline{h^* s^*} \end{matrix}\right\} \begin{matrix} \text{parallel und} \\ \text{gleichgerichtet zu} \end{matrix} \left\{\begin{matrix} \overline{h \gamma_1} \\ \overline{h \gamma_2} \\ \overline{h s} \end{matrix}\right\}, \text{ und gleich } \left\{\begin{matrix} \frac{f_{m+k}}{f_m} \cdot \overline{h \gamma_1} \\ \frac{f_{m+k}}{f_m} \cdot \overline{h \gamma_2}. \\ \frac{f_{m+k}}{f_m} \cdot \overline{h s} \end{matrix}\right.$$

Wenn ferner

$\left.\begin{matrix} \tau \\ \sigma \end{matrix}\right\}$ Schnitt eines Strahles aus $h$ mit $\left\{\begin{matrix} \text{der gebrochenen Sehne } \overline{\gamma_1 s \gamma_2} \\ \text{dem Ovalbogen } \frown{\gamma_1 s \gamma_2} \end{matrix}\right.$

ist, so ist stets, weil $h$ auf $E$, aber nicht auf $\overline{\gamma_1 \gamma_2}$ liegt:

$$(290.)\qquad \overline{h\sigma} \geqq \overline{h\tau}.$$

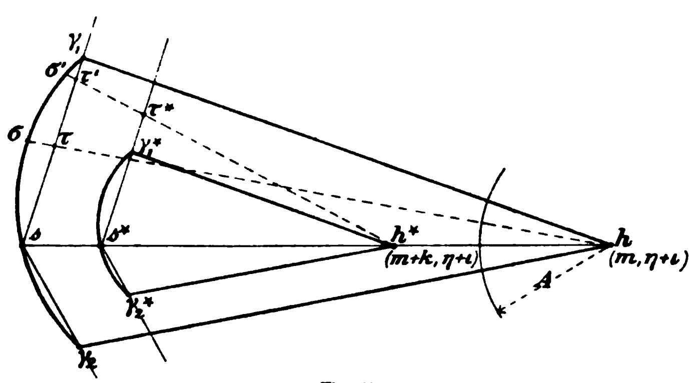



*Fig. 14.*

Wenn nun

Entf.$(h, s\gamma_i)$ die kleinere der beiden Größen $\left\{\begin{matrix} \text{Entf.}(h, s\gamma_1) \\ \text{Entf.}(h, s\gamma_2) \end{matrix}\right.$

oder ihr gemeinsamer Wert ist, so ist

$$(291.)\qquad \overline{h\tau} \geqq \text{Entf.}(h, s\gamma_i).$$

Aber was für die Gerade $g_1 \gamma_1$ bei (270). bewiesen wurde, gilt auch für die Gerade $s\gamma_i$; also ist:

$$(292.)\qquad \text{Entf.}(h, s\gamma_i) \geqq f_m \cdot \varepsilon.$$

Die Verbindung der drei letzten Ungleichungen ergibt:

(293.) $$\overline{h\sigma} \geqq f_m \cdot \varepsilon.$$

Vermöge der Ähnlichkeit ergeben sich aus (291.) und (292.) gewisse Ungleichungen

(294.) $$\overline{h^* \tau^*} \geqq \text{Entf.}\,(h^*, s^* \gamma_i^*) \geqq f_{m+k} \cdot \varepsilon,$$

und diese gelten *offenbar* für einen Punkt $\tau^*$, nicht nur der gebrochenen Sehne $\gamma_1^* s^* \gamma_2^*$, sondern der gebrochenen Geraden $\gamma_1^* s^* \gamma_2^*$ überhaupt.

287. Es bedeute — vgl. Fig. 14 —:

$\left.\begin{matrix}\tau^* \\ \tau' \\ \sigma'\end{matrix}\right\}$ den Schnitt eines $h^*$-Strahls mit $\left\{\begin{matrix}\text{der gebrochenen Geraden } \gamma_1^* s^* \gamma_2^* \\ \text{der gebrochenen Geraden } \gamma_1 s \gamma_2 \\ \text{dem Ovalbogen } \widehat{\gamma_1 s \gamma_2}.\end{matrix}\right.$

Weil $s^*$ infolge von (288.) zu $H$ gehört und $H$ übrigens ein Oval ist, das von der Geraden $hs$ nur in $h$ und $s$ geschnitten wird, so ist

(295.) $$\overline{hs} \geqq \overline{hs^*},$$

also auch, unter Zuhilfenahme von (289.):

(296.) $$\overline{h^* s} \geqq \overline{h^* s^*},$$

also überhaupt

(297.) $$\overline{h^* \tau'} \geqq \overline{h^* \tau^*}.$$

Nun ist

(298.) $$\overline{h^* \sigma'} \geqq \overline{h^* \tau'},$$

also

(299.) $$\overline{h^* \sigma'} \geqq \overline{h^* \tau^*}.$$

Weiter ist

(294.) $$\overline{h^* \tau^*} \geqq f_{m+k} \cdot \varepsilon,$$

also

(300.) $$\overline{h^* \sigma'} \geqq f_{m+k} \cdot \varepsilon.$$

Der Wert $f_{m+k}$ ist ein von Null verschiedener positiver Wert, denn es gilt

(300a.) $$f_m > f_{m+k} \geqq f_\eta > f_{\eta+\zeta} \geqq 0. \qquad \text{(vgl. (247.) und (251.))}$$

Indem man noch $\mathfrak{d}$ von (285.) her einführt und die Bedeutung von $\sigma'$ bedenkt, erhält man

(301.) $\text{Entf.}\,(h^*, \widehat{\gamma_1 s \gamma_2}) \geqq f_{m+k} \cdot \varepsilon > f_{m+k} \cdot \mathfrak{d} > 0.$

Wir können also die bei (257.) geforderte Größe

(302.) $\Gamma = f_{m+k} \cdot \mathfrak{d}$

setzen.

288. Wenn nun

(303.) $\varDelta$ die kleinste der bei $\left\{\begin{matrix}(268a.)\\(287.)\\(302.)\end{matrix}\right\}$ auftretenden Größen $\left\{\begin{aligned} A &= \frac{2}{\sqrt{5}}(f_m - f_{m+k})\frac{\mathfrak{d}^2}{D} \\ B &= \sqrt{\frac{2}{5}}(f_m - f_{m+k})\frac{\mathfrak{d}^4}{D^3} \\ \Gamma &= f_{m+k} \cdot \mathfrak{d}, \end{aligned}\right.$

d. h. also die kleinere der beiden nicht verschwindenden Größen

(304.) $\sqrt{\frac{2}{5}}\,(f_m - f_{m+k})\,\frac{\mathfrak{d}^4}{D^3},\ f_{m+k} \cdot \mathfrak{d},$*)

oder, wenn diese gleich sind, ihren gemeinsamen Wert bezeichnet, so befriedigt $\varDelta$ die bei (259.) geforderte Ungleichung

$$\text{Entf.}\,(h^*, E) > \varDelta > 0,$$

welche, wenn wir auf die eigentliche Bedeutung der Buchstaben zurückgehen, und die oberen seit (276.) weggelassenen Indizes wieder einführen, die Bedeutung hat:

(305.) $\text{Entf.}\,((m+k,\ \eta+\iota),\ E^{(m)}) > \varDelta > 0, \quad (\iota = 0, 1, 2 \ldots \zeta)$

289. Auf diese Ungleichungen kann man aber analoge Schlüsse anwenden, wie auf die früher behandelten bei (191.), aus welchen sie entstehen, wenn man für

$$0,\ \mu,\ \varkappa,\ E,\ \varrho,\ \sigma$$

resp. einsetzt:

$$m+k,\ \eta,\ \iota,\ E^{(m)},\ \varDelta,\ \zeta.$$

---

*) Es scheint mir kein Umstand im Wege zu stehen, der uns verhindern könnte, für $f_m$, $f_{m+k}$ direkt $\chi(\bar{t}), \chi(\bar{T})$, d. h. die den Grenzen des Teilintervalls entsprechenden $\chi$-Werte zu setzen, so daß dann kommt:

$$A = \frac{2}{\sqrt{5}}\,(\chi(\bar{t}) - \chi(\bar{T}))\frac{\mathfrak{d}^2}{D},\quad B = \sqrt{\frac{2}{5}}\,(\chi(\bar{t}) - \chi(\bar{T}))\frac{\mathfrak{d}^4}{D^3},\quad \Gamma = \chi(\bar{T}) \cdot \mathfrak{d}.$$

Das Eintreten von $m+k$ für 0 erweckt kein Bedenken, da die entsprechende Zeile unbeschadet ihrer Entstehung aus früheren Zeilen und der Entstehung späterer Zeilen aus ihr auch als die erstgegebene Zeile betrachtet werden kann. Statt des Ergebnisses (200.), (201.) erhalten wir jetzt die folgenden Ungleichungen, in denen $E^{(m)}$, offenbar erlaubterweise, durch $E$ ersetzt ist:

$$\text{(306.)}\qquad \begin{aligned} &\text{Entf.}\,((\eta,\eta),E) > \frac{f_\eta}{f_{m+k}}\varDelta \\ &\text{Entf.}\,((\eta+1,\eta+1),E) > \frac{f_\eta}{f_{m+k}}\varDelta \\ &\quad\vdots \qquad\qquad\qquad\quad \vdots \\ &\text{Entf.}\,((\eta+\zeta,\eta+\zeta),E) > \frac{f_\eta}{f_{m+k}}\varDelta \end{aligned}$$

bezw. die eine zusammenfassende Ungleichung:

$$\text{(307.)}\qquad \text{Entf.}\,(J_{\eta+\iota},E) > \frac{f_\eta}{f_{m+k}}\varDelta \qquad (\iota=0,1,2\ldots\zeta)$$

Indem wir nun die Teilung $t_\eta, t_{\eta+1}\ldots t_{\eta+\zeta}$ bereits so eng gemacht denken, daß

$$\text{(308.)}\qquad \text{Entf.}\,(L_{\eta+\iota},J_{\eta+\iota}) < \beta\frac{f_\eta}{f_{m+k}}\varDelta \qquad (0<\beta<1)$$

wird, ergibt sich aus den beiden letzten Ungleichungen:

$$\text{(309.)}\qquad \text{Entf.}\,(L_{\eta+\iota},E) > (1-\beta)\frac{f_\eta}{f_{m+k}}\varDelta$$

oder

$$\text{(309 a.)}\qquad \text{Entf.}\,(L_{\eta+\iota},E) > \beta'\frac{f_\eta}{f_{m+k}}\varDelta \qquad (0<\beta'<1).$$

Da aber die $t_{\eta+\iota}$ an beliebige Stellen des Intervalles $\overline{\overline{T}}\,\overline{\overline{t}}$ fallen können, $t_\eta$ gleich $\overline{T}$ und $\chi(t_{m+k})$ gleich $\chi(\overline{T})$ werden darf,*) so wird aus (309 a.) sofort

$$\text{(310.)}\qquad \text{Entf.}\,(L(t),E) > \beta'\frac{\chi(\overline{\overline{T}})}{\chi(\overline{T})}\varDelta \qquad (\overline{\overline{T}}\leqq t\leqq\overline{\overline{t}}),$$

*) Vergleiche die Anmerkung zu (304.) auf der vorigen Seite.

eine Ungleichung, die für ein von der Einheit verschiedenes $\chi(t_0)$ in die folgende übergeht.

(310a.) $$\text{Entf.}\,(L(t), \chi(t_0)E) > \beta' \frac{\chi(t_0)\chi(\overline{\overline{T}})}{\chi(\overline{T})}\,\Delta.$$

290. Bis hierher haben wir von dem Umstande, daß $\chi(t)$ an der Stelle $\delta$ sich bewegt, noch keinen Gebrauch gemacht, denn (300a.) zieht auch noch für $f_\eta = f_{\eta+\zeta}$. Die bisher erhaltenen Ergebnisse werden daher für einen beliebigen Punkt $\delta$, dessen Verbindungsstrecke mit $\gamma$ ins Innere von $E$ fällt und dessen $t$ größer ist als das zu $\gamma$ gehörige $t$, Geltung haben. Dies ist für später wichtig.

Wenn wir nun aber die vorausgesetzte Eigenschaft der Stelle $\delta$, daß $\chi(t)$ sich dort bewegt, mit heranziehen, so wird daraus folgen, daß im Intervall $\overline{\overline{T}}\,\overline{\overline{t}}$ zwei verschiedene Werte $\chi(t)$ vorkommen, und daß also Satz (237.) anwendbar ist, wonach der Punkt

$$L(t') \equiv \overline{X}' + i\,\overline{Y}'$$

jetzt nicht innerhalb $\chi(t_0)E$ liegen kann. Und zwar wird nach (188.)

(311.) $$\begin{aligned}\text{Entf.}\,(L(t'), \chi(t_0)E) &> \beta'\Big(1 - \frac{\chi(\overline{\overline{t}})}{\chi(\overline{\overline{T}})}\Big)\,\frac{\chi(t_0)\chi(\overline{\overline{T}})}{\chi(\overline{T})}\,\Delta \\ &> \beta'\,\frac{\chi(t_0)}{\chi(\overline{T})}\,(\chi(\overline{\overline{T}}) - \chi(\overline{\overline{t}}))\,\Delta\end{aligned}$$

gesetzt werden dürfen. *Hiermit ist Satz 267 bewiesen und vervollständigt; leichtersichtlicherweise auch in der auf die Annahme $\chi(t_0) \neq 0$ bezüglichen Form.*

291. Nun sei $t_a$ derjenige Wert im Intervall $t_0 t'$, welcher entweder die Bedingungen

(312.) $$\begin{Bmatrix}\chi(t) > 0, & \text{wenn } t < t_a \\ \chi(t) = 0, & \text{wenn } t \geqq t_a\end{Bmatrix}$$

oder die Bedingungen

(313.) $$\begin{Bmatrix}\chi(t) > 0, & \text{wenn } t \leqq t_a \\ \chi(t) = 0, & \text{wenn } t > t_a\end{Bmatrix}$$

erfüllt; ist ein solcher Wert, weil $\chi(t)$ im ganzen Intervall positiv bleibt, nicht vorhanden, so sei

(314.) $$t_a = t'.$$

Nach der Bemerkung zu Anfang von 290 können wir, ohne daß Ungleichung (310.) ihre Geltung verliert, für $\delta$ auch den Punkt $A(t_a)$ setzen, vorausgesetzt,

daß er von $\gamma$ verschieden ist und seine Verbindungstrecke mit $\gamma$ ins Innere von $E$ fällt. Die Ungleichung lautet dann

(315.) $$\text{Entf.}\,(L(t_a), E) > \beta' \frac{\chi(\bar{\bar{T}})}{\chi(\bar{T})} \varDelta > 0.$$

Die Definition von $t_a$ oben und von $\bar{T}$ bei 269 bieten Gewähr dafür, daß

(316.) $$\chi(\bar{\bar{T}}) > 0$$

bleibt.

Es gilt aber offenbar

(317.) $$L(t') = L(t_a).$$

Somit hat man:

292. *$L(t')$ liegt, wenn $\chi(t_0) = 1$, sicher nicht auf $E$, wenn ins Innere von $E$ fällt die Verbindungsstrecke von $A(t_a)$ mit einem andern Punkte $A(t)$ von $\mathfrak{A}$, für dessen Argument $t$ sich $\chi(t)$ bewegt.*

Dieser Satz im Zusammenhalt mit 267 läßt erkennen:

293. *Soll $L(t')$, während $\chi(t_0) = 1$ ist, auf $E$ liegen, und es gibt zwei von $t_a$ verschiedene Stellen $t_1 > t_2$, für welche sich $\chi(t)$ bewegt, so müssen die drei Strecken*

(318.) $$\overline{A(t_1)\,A(t_2)},\quad \overline{A(t_2)\,A(t_a)},\quad \overline{A(t_a)\,A(t_1)}$$

*völlig zu $E$ gehören.*

Aber es läßt sich weiter zeigen:

294. *In diesem Fall können $A(t_1)\,A(t_2)\,A(t_a)$ nur auf einer Geraden liegen, nicht aber ein eigentliches Dreieck bilden.*

295. Denn nehmen wir einmal versuchsweise an, daß ein eigentliches Dreieck $A(t_1)\,A(t_2)\,A(t_a)$ vorliegt. Dann muß $E$ offenbar mit ihm identisch sein; $\chi(t)$ kann sich nach dem Obigen höchstens ändern, während $t$ einen Wert passiert, der $A(t)$ auf einen Eckpunkt fallen läßt, es bleibt konstant mindestens so lange, als $A(t)$ auf einer Dreiecksseite sich zwischen zwei Eckpunkten bewegt. $A(t)$ kann nun auf einen Eckpunkt fallen nicht uur, sobald $t$ einen der drei Werte $t_1$, $t_2$, $t_a$ annimmt, sondern noch für viele, ja sogar für unendlich viele andere Werte. Der letzte Umstand darf, wenn wir allgemeine Ergebnisse erzielen wollen, nicht unberücksichtigt bleiben und bereitet uns noch einigen Aufenthalt. In Anbetracht seiner ist wichtig, daß wir annehmen dürfen:

296. In jedem der Fälle, wo $A(t)$ mit *einem*, $A(t+\Delta t)$ mit *einem andern* der Eckpunkte identisch wird, muß $\Delta t$ — es sei positiv — über einer für alle diese Einzelfälle gleichbleibenden, angebbaren, endlichen, positiven, von Null verschiedenen Größe liegen.

Denn $\Delta t = 0$ ist ausgeschlossen, da $A(t)$ eine eindeutige stetige Funktion von $t$ ist. Es ist aber auch ausgeschlossen, daß eine unendliche Reihe solcher Fälle vorliegt mit zugeordneten $\Delta t$, die unter jede endliche Größe herabsinken.

Solche in dem endlichen Intervall $t_0 t'$ enthaltenen unendlich vielen Intervalle $\Delta t$ würden unendlich viele Endpunkte haben, die nach einem bekannten *Weierstraß*schen Satze mindestens gegen *einen* Grenzpunkt $t_g$ hin sich unendlich häufen müßten. Daraus folgt, daß die nirgends in einander übergreifenden Intervalle $\Delta t$ selbst gegen $t_g$ hin sich unendlich häufen müßten und es keine noch so eng begrenzte nach beiden Seiten sich erstreckende Nachbarschaft von $t_g$ geben könnte, welche nicht unendlich viele von unsern Intervallen $\Delta t$ in sich aufnähme; $t_g$ müßte aber, als Grenzpunkt zum Intervall $t_0 t'$ gehöriger Punkte selbst mit zu diesem *abgeschlossenen* Intervalle gehören. Das Integral

$$A(t_g) \equiv \int_{t=t_0}^{t=t_g} g\,dz \tag{319.}$$

würde offenbar unbestimmt, $g$ also nicht im ganzen Intervall $t_0 t'$ *integrabel* sein, wie wir doch bei 193 vorausgesetzt haben.

Da also der Übergang des Punktes $A(t)$ von einem Eckpunkt zu einem andern immer mehr als einen gleichbleibenden endlichen Bruchteil des endlichen Intervalls $t_0 t'$ in Anspruch nimmt, kann für das Intervall nur eine endliche Anzahl solcher Übergänge stattfinden.

297. Dagegen kann der wandernde Punkt $A(t)$, bevor er von einem Eckpunkt $P$ aus einen andern Eckpunkt $Q$ erreicht, beliebig oft und rasch nach $P$ zurückkehren, und auf $P$ bald für einen einzigen $t$-Wert, bald für ein endliches $t$-Intervall verweilen. Wir brauchen die dadurch möglich werdenden Gestaltungen unserer Funktionen für unsern Zweck nicht genauer zu sondern, Dank der Hilfeleistung des folgenden Satzes, in welchem mit

$$P, Q, R$$

die Punkte

$$A(t_1),\ A(t_2),\ A(t_a)$$

in einer beliebigen Reihenfolge bezeichnet werden:

298. *Wenn*

$$t_0 \leqq \alpha < \beta \leqq t', \quad A(\alpha) = A(\beta) = P$$

*ist, und wenn, falls* $A(t)$ *im Intervall* $\alpha\beta$ *mit* $Q$ *oder* $R$ *identisch werden sollte,* $\chi(t)$ *wenigstens seinen Wert dort nicht ändert, so ist*

$$L(\beta) - L(\alpha) = \int_{t=\alpha}^{t=\beta} \chi \cdot g \cdot dz = 0.$$

299. Der Satz gilt offenbar

1) in dem besonderen Falle, daß $A(t)$ innerhalb des Intervalls $\alpha\beta$ nicht mehr mit $P$ identisch wird, denn dann ist während des Integrierens $\chi(i)$ sicher konstant gleich $\chi(\alpha)$ und

$$(320.) \qquad \int_{t=\alpha}^{t=\beta} \chi \cdot g \cdot dz = \chi(\alpha) \int_{t=\alpha}^{t=\beta} g \cdot dz = \chi(\alpha)[A(\beta) - A(\alpha)] = 0,$$

2) in dem besonderen Falle, daß $A(t)$ für das ganze Intervall $\alpha\beta$ mit $P$ identisch bleibt, denn dann folgt aus

$$(321.) \qquad A(t) - A(\alpha) = \int_{t=\alpha}^{t=t} g \cdot dz = 0 \qquad (\alpha \leqq t \leqq \beta)$$

daß auch

$$(322.) \qquad L(\beta) - L(\alpha) \equiv \int_{t=\alpha}^{t=\beta} \chi \cdot g dz = 0$$

ist vermittels unseres Satzes 194, dessen Eigebiet $\mathfrak{E}$ im vorliegenden Falle sich auf den Nullpunkt reduziert.

Aus der Giltigkeit unseres Satzes in den beiden angeführten besonderen Fällen folgt aber seine Giltigkeit im allgemeinen.

300. Dies führt zu einer wesentlichen Vereinfachung unseres Problems: Wir dürfen, ohne den Wert $L(t')$ dadurch zu beeinflussen, die Funktionen $A(t)$ und $\chi(t)$ in der Weise verändern, daß sie in jedem Intervall $\alpha\beta$ der bei 298 geschilderten Art die konstanten Werte $A(\alpha)$ und $\chi(\alpha)$ erhalten. Wir haben dann eine Funktion $A(t)$ vor uns, die zwischen einer endlichen Anzahl von Eckpunktsaufenthalten eine endliche Anzahl Übergänge von Eckpunkt zu Eckpunkt ausführt, und eine Funktion $\chi(\tau)$, welche nur eine endliche Anzahl endlicher Unstetigkeitssprünge hat, im übrigen konstant sich verhält.

301. Nun seien, indem man $t_a$ *stets* unbesehen mit beizieht,

(323.) $$\tau_1 < \tau_2 < \ldots \tau_\varkappa < \tau_{\varkappa+1} < \ldots < \tau_n (= t_a)$$

die Stellen des Intervalls $t_0 t'$, an denen $\chi(t)$ sich ändert,

(324.) $$\chi_{(1)}, \chi_{(2)}, \ldots \chi_{(n-1)}$$

die Werte, welche $\chi(t)$ in den Intervallen zwischen diesen Werten konstant beibehält. Dann ist

(325.) $$\int_{t=t_0}^{t=\tau_1} \chi \cdot g \cdot dz = A(\tau_1)$$

(weil $\chi(t) = 1$ ist für $t_0 \leqq t < \tau_1$)

und

(326.) $$\int_{t=\tau_\varkappa}^{t=\tau_{\varkappa+1}} \chi \cdot g \cdot dz = \chi_{(\varkappa)} [A(\tau_{\varkappa+1}) - A(\tau_\varkappa)],$$

(für $\varkappa = 1, 2, \ldots n-1$)

also

(327.) $$\dot{L}(t') = \int_{t=t_0}^{t=t'} \chi \cdot g \cdot dz = \int_{t=t_0}^{t=t_a} \chi \cdot g \cdot dz$$

$$= A(\tau_1) + \chi_{(1)} [A(\tau_2) - A(\tau_1)] + \chi_{(2)} [A(\tau_3) - A(\tau_2)] + \cdots + \chi_{(n-1)} [A(\tau_n) - A(\tau_{n-1})].$$

Hierbei sind die $A(\tau_\varkappa)$ immer wieder die Dreieckseckpunkte, jeder Eckpunkt kommt mindestens einmal vor, $n$ ist also mindestens gleich 3. Die Werte (324.) bilden eine positive, monotone, stets abnehmende Reihe und die Definition von $t_a$ bürgt dafür, daß auch $\chi_{(n-1)}$ noch größer als Null ist.

302. Nun können wir durch Anwendung des Satzes 44, indem wir an Stelle der $\varepsilon_\varkappa$, $(0\varkappa)$ und des Eigebildes $E$ jetzt die $\chi(\varkappa)$, $A(\tau_\varkappa)$, und unser Dreieck treten lassen, offenbar schließen, daß $L(t')$ auf der Dreiecksperipherie nur liegen kann, wenn sämtliche $A(\tau_\varkappa)$, d. h. sämtliche 3 Ecken

(328.) $$A(t_1),\ A(t_2),\ A(t_a)$$

auf einer Geraden liegen. Wir geraten also durch die Annahme, daß $L(t')$ auf $E$ liegt und zugleich die drei Punkte (328.) ein eigentliches Dreieck bilden, in unlösbaren Widerspruch, der Satz 294 ist bewiesen.

303. *Es folgt sofort, daß für eventuell vorhandene weitere Bewegungsstellen*

$$t_3, t_4, \ldots t_\nu$$

*von* $\chi(t)$ *die Punkte*

$$A(t_3),\ A(t_4)\ldots A(t_\nu)$$

*ebenfalls mit den Punkten* (328.) *auf ein- und derselben Geraden liegen müssen.*

304. Viel leichter ersichtlich ist die Geltung des umgekehrten Satzes:

*Wenn alle Punkte* $A(t)$, *deren Argumente sich als zum Intevall* $t_0\,t'$ *gehörige Bewegungsstellen der Funktion* $\chi(t)$ *erweisen, dazu noch — falls* $A(t')$ *gleich* $A(t_a)$ *ist und nicht schon unter den ebengenannten Punkten vorkommt — der Punkt* $A(t')$, *zusammen auf einer Geraden* $G$ *liegen, die nicht ins Innere von* $\mathfrak{E}$ *eindringt und also Stützgerade von* $\mathfrak{E}$ *ist, so liegt der Punkt* $L(t')$ *auf* $E$, *und zwar notwendig auch auf der Stützgeraden* $G$.

Den Beweis darf ich wohl dem Leser überlassen.

305. Alles zusammengefaßt:

*Wenn* $\chi(t_0)=1$ *ist, und bezüglich unserer Funktionen die Voraussetzungen wie für* 194 *getroffen werden, so ist die notwendige und hinreichende Bedingung dafür, daß* $L(t')$ *auf* $E$ *selbst liegt, die, daß alle Punkte* $A(t)$, *deren Argumente* $t$ *sich als zum Intervall* $t_0\,t'$ *gehörige Bewegungsstellen der Funktion* $\chi(t)$ *erweisen, dazu noch — falls* $A(t')$ *mit dem bei* 291 *definierten Punkte* $A(t_a)$ *zusammenfällt und nicht schon unter den eben genannten Punkten vorkommt — der Punkt* $A(t')$, *zusammen auf einer Geraden* $G$ *liegen, die nicht ins Innere von* $\mathfrak{E}$ *eindringt und somit notwendig eine Stützgerade von* $\mathfrak{E}$ *ist.* $L(t')$ *liegt dann auch auf* $G$.

Natürlich kann die Anzahl der $A(t)$, für deren $t$ sich $\chi(t)$ bewegt, ins Unendliche wachsen, ja sie können die ausgespannte Strecke lückenlos ausfüllen.

Aus dem letzten Satze folgt sofort der allgemeinere:

306. *Wenn bezüglich unserer Funktionen die Voraussetzungen wie bei* 194 *getroffen werden, so ist die notwendige und hinreichende Bedingung dafür, daß* $L(t')$ *auf* $\chi(t_0)\cdot E$ *liegt, die, daß alle Punkte* $A(t)$, *deren Argumente* $t$ *sich als zum Intervall* $t_0\,t'$ *gehörige Bewegungsstellen der Funktion* $\chi(t)$ *erweisen, dazu noch — falls* $A(t')$ *mit* $A(t_a)$ *zusammenfällt und nicht schon unter den eben genannten Punkten vorkommt — der Punkt* $A(t')$, *zusammen auf einer Geraden* $G$ *liegen, die nicht ins Innere von* $\mathfrak{E}$ *eindringt und somit notwendig Stützgerade von* $\mathfrak{E}$ *ist.* $L(t')$ *liegt dann auf der Geraden* $\chi(t_0)\cdot G$, *welche Stützgerade von* $\chi(t_0)\cdot E$ *ist.*

307. Diese Regeln halten auch Stich für die äußersten besondern Fälle: liegen z. B. die genannten Punkte $A(t)$ für $\chi(t_0)=1$ alle in einem einzigen Punkte $p$ zusammen und es soll $L(t')$ auf $E$ liegen, so muß durch $p$ eine Stützgerade gehen; dies ist, weil $p$ zu $\mathfrak{E}$ gehört, gleichbedeutend damit, daß $p$ auf der Begrenzung $E$ liegt; oder: Ist $\chi(t)$ durchweg konstant gleich 1, so reduzieren sich die genannten Punkte $A(t)$ auf den einzigen $A(t_a)$ und es genügt, daß dieser auf $E$ liege.

308. Erinnert muß daran werden, daß seit 267 $\mathfrak{E}$ als ein Oval mit inneren Punkten vorausgesetzt wurde, also eine Ebene aufspannt.

*Wenn $\mathfrak{E}$ in eine gerade Strecke oder einen Punkt entartet, so liegen alle zu $\mathfrak{E}$ gehörigen Punkte auch auf $E$; auch $\chi(t_0)\mathfrak{E}$ entartet dann und $L(t')$ liegt stets auf $\chi(t_0)E$.*

309. Es schließt sich hier naturgemäß folgende Frage noch an:

*Wenn $\chi(t_0)$ gleich Eins ist und das Eigebiet $\mathfrak{E}$, dem die Werte $A(t)$ des Intervalles $t_0t'$ angehören, in eine gerade Strecke $S$, aber nicht in einen einzigen Punkt entartet — welches sind dann die Bedingungen dafür, daß für $\chi(t)=1$ der Punkt $L(t')$ auf einen der beiden Endpunkte von $S$ fällt?*

Die Antwort lautet:

*$L(t')$ fällt auf einen Endpunkt $s$ von $S$ dann und nur dann, wenn jeder Punkt $A(t)$, dessen Argument eine zum Intervall $t_0t'$ gehörige Bewegungsstelle von $\chi(t)$ ist, und außerdem — falls $A(t')$ nicht schon dabei, $\chi(t')>0$ ist — auch noch der Punkt $A(t')$ auf $s$ fällt.*

Nachdem wir den schwierigeren Satz 305 so ausführlich bewiesen haben, dürfen wir den Beweis dieses einfacheren, der besonders auch auf den rein reellen Fall Anwendung findet, wohl dem Leser überlassen.

310. Natürlich gilt auch die Verallgemeinerung:

*Wenn $\chi(t_0)$ einen beliebigen positiven Wert hat und das Eigebiet $\mathfrak{E}$, dem die Werte $A(t)$ des Intervalles $t_0t'$ angehören, in eine gerade Strecke $S$ mit den nicht zusammenfallenden Endpunkten $s_i$ $(i=1,2)$ entartet, so fällt $L(t')$ auf $\chi(t_0)s_i$ dann und nur dann, wenn jeder Punkt $A(t)$, dessen Argument eine zum Intervall $t_0t'$ gehörige Bewegungsstelle der Funktion $\chi(t)$ ist, und außerdem — falls $A(t')$ nicht schon dabei, $\chi(t')>0$ ist — auch noch der Punkt $A(t')$ auf $s_i$ fällt.*

311. Wir wollen nun auch beim Randproblem von positiven niemals steigenden Funktionen $f(x,y)$, bezw. $\chi(t)$ zu beliebig monoton verlaufenden übergehen.

312. Es bleibē zunächst $\chi(t)$ im Intervall $t_0\,t'$ eine niemals steigende Funktion, es sei aber

(329.) $$\chi(t') < 0.$$

Wir dürfen außerdem annehmen, daß

(330.) $$\chi(t_0) > \chi(t')$$

sei, da ohne weiteres klar ist, was aus unseren Sätzen wird, wenn $\chi(t)$ im ganzen Intervall einen beliebigen reellen konstanten Wert hat (vgl. 317 gegen Ende). Es ist unter diesen Voraussetzugen

(331.) $$\int_{t=t_0}^{t=t'} \chi(t)\, g(x,y,i)\, dz = \int_{t=t_0}^{t=t'} (\chi(t)-\chi(t'))\, g(x,y,i)\, dz + \chi(t') \int_{t=t_0}^{t=t'} g(x,y,i)\, dz = p+q.$$

Der erste Summand rechts stellt, da im Intervall die Funktion

(332.) $$\chi(t)-\chi(t') \geqq 0$$

ist und niemals steigt, auf Grund von 194 einen Punkt $p$ des Ovalgebietes

(333.) $$\mathfrak{P} \equiv (\chi(t_0)-\chi(t'))\cdot\mathfrak{E},$$

der zweite stellt einen Punkt $q$ des Ovalgebietes

(334.) $$\mathfrak{Q} \equiv \chi(t')\cdot\mathfrak{E}$$

vor.

313. Wenn nun der Punkt $p+q$ einen Punkt auf dem Rande des Ovalgebietes

(335.) $$\mathfrak{P} \dot{+} \mathfrak{Q} \equiv (\chi(t_0)-\chi(t'))\cdot\mathfrak{E} \dot{+} \chi(t')\cdot\mathfrak{E}$$

sein soll, so müssen, nach 105, $p$ und $q$ auf dem Rande von $\mathfrak{P}$, resp. $\mathfrak{Q}$ und zwar auf parallelen, nach der nämlichen Seite liegenden Stützgeraden von $\mathfrak{P}$ resp. $\mathfrak{Q}$ liegen.

314. Es sei nun zuerst angenommen, daß $t'$ eine zum Intervall $t_0\,t'$ gehörige Bewegungsstelle $\chi(t)$ sei, so daß $\chi(t)-\chi(t')$ für keinen Wert $t > t'$ zu Null wird.

Der Punkt $p$ kann dann auf $(\chi(t_0)-\chi(t'))\cdot E$ nach 306 nur liegen, wenn alle Punkte

$$A(t) = \int_{t=t_0}^{t=t} g(x, y, i)\, dz,$$

deren Argument $t$ eine zum Intervall $t_0\, t'$ gehörige Bewegungsstelle von $\chi(t) - \chi(t')$ ist — unter ihnen $A(t')$ — zusammen auf $E$ und zwar auf *einer* Stützgeraden $G$ von $E$ liegen; der Punkt $p$ liegt dann auf dem Oval $(\chi(t_0) - \chi(t'))E$ und zwar auf seiner Stützgeraden

(336.) $$(\chi(t_0) - \chi(t'))\, G.$$

Andrerseits liegt Punkt $q$ auf dem Oval $\chi(t')E$ und zwar auf seiner Stützgeraden

(337.) $$\chi(t')G.$$

Nun sind zwar diese zwei Stützgeraden parallel, aber bei dem positiven Charakter von $\chi(t_0) - \chi(t')$ und dem negativen von $\chi(t')$ offenbar nach verschiedenen Seiten an ihren respektiven Ovalen gelegen, und fallen, solange $\mathfrak{E}$ eine Ebene aufspannt, auch sicher nicht zusammen. Die Bedingung 313 kann dann also unter Voraussetzung 314 überhaupt nicht erfüllt sein. Somit kann auch

(338.) $$L(t') = p + q$$

nie auf den Rand des Ovalgebietes $\mathfrak{P} + \mathfrak{Q}$, das ja innere Punkte aufweist, zu liegen kommen.

315. Unsere Schlüsse werden hinfällig, sobald wir Voraussetzung 314 fallen lassen, wenn wir also annehmen, daß $\chi(t)$ bei $t'$ sich im Intervall *nicht* bewegt. Dann wird $\chi(t) - \chi(t')$ Null werden schon für einen Wert

$$t_a < t'$$

und $t_a$, $A(t_a)$ werden dieselbe Bedeutung haben, wie früher bei 291 usw., nur daß jetzt an Stelle von $\chi(t)$ die Funktion $\chi(t) - \chi(t')$ getreten ist. Es wird, in diesem Sinne gefaßt, $A(t_a)$ im allgemeinen von $A(t')$ verschieden sein, die Lage von $A(t')$ und die von $p$ werden unabhängig von einander. $L(t')$ wird auf den Rand von $\mathfrak{P} + \mathfrak{Q}$ fallen dann und nur dann, wenn die den Bewegungsstellen von $\chi(t)$ entsprechenden Punkte $A(t)$ — unter ihnen $A(t_a)$ — auf $E$ und zwar *einer* Stützgeraden $G$ von $E$ liegen und $A(t')$ zwar auch auf $E$ liegt, aber auf der zu $G$ entgegengesetzten parallelen Stützgeraden $G'$.

316. Über die andern Fälle einer monotonen Funktion $\chi(t)$, wenn

nämlich im Intervall

$$\chi(t_0)-\chi(t')<0;\ \chi(t')<0$$

oder

$$\chi(t_0)-\chi(t')<0;\ \chi(t')>0$$

ist, erhält man die gewünschte Auskunft durch einfachen Vorzeichenwechsel von $\chi(t)$ aus früheren Ergebnissen. Fassen wir alles zusammen:

317. *Wenn die Funktion $f(x, y)$ oder $\chi(t)$ im Intervall $t_0 t'$ reell und monoton verläuft, im übrigen die für* 194 *getroffenen Voraussetzungen Geltung haben und* $\mathfrak{E}$ *eine Ebene aufspannt, so gehört der Punkt*

$$L(t') \equiv \int_{=t_0}^{t=t'} \chi \cdot g \cdot dz$$

*immer zu dem Ovalgebiet*

(335.) $$(\chi(t_0)-\chi(t'))\mathfrak{E} \dotplus \chi(t')\mathfrak{E}.$$

*Auf dem Rande desselben kann er für*

(339.) $$\begin{gathered} \chi(t_0)>\chi(t')<0 \\ \chi(t_0)<\chi(t')>0 \end{gathered}$$

*überhaupt nicht liegen, außer $\chi(t)$ nimmt schon für einen kleineren Wert als $t'$ den Wert $\chi(t')$ an. In diesem Falle tritt die Randlage ein, sobald den zum Intervall $t_0 t'$ gehörigen Bewegungsstellen von $\chi(t)$ lauter auf $E$ und zwar auf einer Stützgeraden $G$ von $E$ liegende Punkte $A(t)$ entsprechen, und $A(t')$ auch auf $E$, aber auf der zu $G$ entgegengesetzten parallelen Stützgeraden $G$ liegt. $L(t')$ liegt dann auf der Stützgeraden*

(340.) $$(\chi(t_0)-\chi(t'))G \dotplus \chi(t')G'$$

*des Ovalgebietes* (335.).

*Für die Fälle*

(341.) $$\begin{gathered} \chi(t_0)>\chi(t')>0 \\ \chi(t_0)<\chi(t')<0 \end{gathered}$$

*dagegen, in denen sich das Gebiet* (335.) *einfacher mit*

(342.) $$\chi(t_0)\mathfrak{E}$$

*bezeichnen läßt, liegt der Punkt $L(t')$ auf dem Rande $\chi(t_0)E$, sobald folgende Bedingungen erfüllt sind: Es müssen den zum Intervall $t_0 t'$ gehörigen Bewegungsstellen von $\chi(t)$ lauter auf $E$ und zwar auf einer Stützgeraden $G$ von*

*E liegende Punkte $A(t)$ entsprechen. Falls der Punkt $A(t')$ unter ihnen nicht enthalten, aber $\chi(t')$ von Null verschieden ist, so muß er ebenfalls noch auf E und G liegen. Sind diese Bedingungen erfüllt, so liegt $L(t')$ auf $\chi(t_0)E$, und zwar speziell auf der Stützgeraden $\chi(t_0)G$ dieses Ovalgebietes.*

*Wenn $\chi(t)$ im ganzen Intervall $t_0 t'$ gleich einer reellen von Null verschiedenen Konstanten c ist, so liegt $L(t')$ auf dem Rande $cE$ des Ovalgebietes $c\mathfrak{E}$, sobald $A(t')$ auf dem Rande E des Ovalgebietes $\mathfrak{E}$ liegt. Wird $\chi(t)$ im ganzen Intervall $t_0 t'$ gleich Null, so liegt $L(t')$ im Nullpunkt, und wenn man so sagen will, immer auf dem Rande des Ovalgebietes* (335.), *das dann selbst nur aus dem Nullpunkt besteht.*

*Entartet $\mathfrak{E}$ zu einer geraden Strecke oder einem Punkte, so tut das Ovalgebiet* (335.) *das nämliche*); auch dann liegt $L(t')$ immer auf dem Rande dieses Gebietes, das überhaupt keine andern als Randpunkte enthält.*

318. Und hier schließt sich nun noch — als Verallgemeinerung von 310 — folgender Satz an, dessen Beweis wir, wie den von 310, dem Leser überlassen können:

*Entartet $\mathfrak{E}$ in seiner Ebene in eine gerade Strecke S mit den Endpunkten $s_i (i=1, 2)$, aber nicht in einen einzigen Punkt, so gehört der Punkt $L(t')$ immer zu der Strecke*

$$\chi(t_0) - \chi(t')S \dot{+} \chi(t')S. \tag{343.}$$

*Auf einen Endpunkt dieser Strecke kann er unter den Bedingungen* (339.) *überhaupt nicht fallen, außer $\chi(t')$ nimmt schon für einen kleinern Wert als $t'$ den Wert $\chi(t')$ an. In diesem Falle tritt die Lage auf einem Endpunkt ein, sobald den zum Intervall $t_0 t'$ gehörigen Bewegungsstellen von $\chi(t)$ immer derselbe Endpunkt*

$$A(t) = s_i$$

*entspricht, $A(t')$ dagegen mit dem andern Endpunkt $s_i$ zusammenfällt.*

*Unter den Bedingungen* (341.) *dagegen, unter denen sich die Strecke* (343.) *einfacher mit*

$$\chi(t_0)S \tag{344.}$$

*bezeichnen läßt, liegt $L(t')$ auf einem der Endpunkte $\chi(t_0)s_i$, sobald folgende Bedingungen erfüllt sind: Es müssen den zum Intervall $t_0 t'$ gehörigen Bewe-*

*) Wenn $\chi(t)$ konstant Null ist, entartet das Gebiet sogar zu einem Punkte, ohne daß $\mathfrak{E}$ dies tut.

*gungsstellen von $\chi(t_0)$ Punkte $A(t)$ entsprechen, die sämtlich mit demselben Endpunkt $\chi(t_0)s_i$ zusammenfallen. Falls der Punkt $A(t')$ unter ihnen nicht enthalten, aber $\chi(t')$ von Null verschieden ist, so muß er ebenfalls mit $\chi(t_0)\cdot s_i$ zusammenfallen. Sind diese Bedingungen erfüllt, so fällt auch $L(t')$ mit dem nämlichen Endpunkt $\chi(t_0)s_i$ zusammen.*

*Wenn $\chi(t)$ im ganzen Intervall $t_0t'$ gleich einer reellen, von Null verschiedenen Konstante $c$ ist, so liegt $L(t')$ auf einem Endpunkt $c\cdot s_i$ der Strecke $cS$, sobald $A(t')$ auf dem Endpunkt $s_i$ der Strecke $S$ liegt.*

*Wird $\chi(t)$ im ganzen Intervall $t_0t'$ gleich Null, so liegt $L(t')$ im Nullpunkt, und wenn man so sagen will, immer auf einem Endpunkt der Strecke* (343.), *die dann selbst nur aus dem Nullpunkt besteht.*

319. Die Analogie des vereinfachten Satzes 318 zum voller ausgebildeten 317 tritt noch besser hervor, wenn wir in 318 nicht die Ebene, sondern allein die von $S$ ausgespannte Gerade als den der Betrachtung zu Grunde gelegten Raum ansehen. In diesem beschränkteren Raum sind die Endpunkte als einzige Rand- oder Begrenzungspunkte von $S$ das völlig entsprechende zum Begrenzungsoval $E$ des besser ausgebildeten Eigebietes $\mathfrak{E}$, die übrigen Punkte von $S$ sind „innere". Wir haben ja auch schon früher die gerade Strecke in den Begriff der „Eigebiete", das Punktpaar in den der „Eigebilde" mit hineingezogen.

Die eben besprochene Beschränkung des der Betrachtung zu Grunde liegenden Raumes auf *eine* Dimension liegt vor, sobald man sich in unsern Sätzen auf reelle Variable beschränkt.

320. Die etwas langwierige und dornige Behandlung unseres Randproblems hat nun doch noch die Mühe gelohnt, indem sie uns, außer zum eigentlichen Ziel noch zu einem bemerkenswerten andern und einigermaßen unerwarteten Ergebnis geführt hat, das wir folgendermaßen ausdrücken können:

Der *Bonnet*sche und *Du Bois-Reymond*sche Mittelwertsatz und ihre Verallgemeinerungen gehören einer Gattung von Gleichungen an, die man Wertgebietsgleichungen nennen könnte. In einer Wertgebietsgleichung sind links und rechts vom Gleichheitszeichen durch Funktionen, in denen gewisse veränderliche Größen innerhalb gewisser Grenzen willkürlich bleiben, Wertgebiete definiert, und die Gleichnng besagt, daß ein Punkt des einen Gebietes auch zum andern gehöre. Sie kann dies nun besagen

1) in *dem* Sinne: Jeder Punkt des ersten Gebietes gehört zum zweiten und *umgekehrt;*

2) in dem Sinne: Jeder Punkt des einen, sagen wir des ersten Gebietes, gehört zum andern, aber *nicht umgekehrt*.

Es gibt also zwei wohlgeschiedene Arten von Gebietsgleichungen, die *umkehrbaren* und die *nicht umkehrbaren*. Bei der ersten Art ist der Spielraum der veränderlichen Größen auf beiden Seiten so bemessen, daß eine völlige Kongruenz der Gebiete entsteht, bei der zweiten Art so, daß das erste Gebiet nur einen Teil des zweiten ausmacht.

321. Wir haben nun — wenn unsere Schlüsse richtig waren — nachgewiesen, daß die *Weierstraß-Du Bois-Reymond*sche Fassung des Mittelwertsatzes mehrfach eine nichtumkehrbare Gebietsgleichung ist, während sich die Umkehrbarkeit der *Bonnet*schen Form wohl unschwer würde beweisen lassen. Mit andern Worten: Die *Bonnet*sche Gleichung scheint stets eine Gebietskongruenz zu geben, die *Du Bois-Reymond*sche tut dies nicht unter allen Umständen, und gerade in jenen Fragefällen im allgemeinen nicht, mit deren Beantwortung sie über die *Bonnet*sche Form hinausgeht.

322. Eine *nicht umkehrbare* Wertgebietsgleichung erweckt in uns immer die Frage: Läßt sich die Gleichung nicht durch weitere, den Veränderlichen der zweiten Gleichungsseite auferlegte Beschränkungen in eine brauchbare und nicht selbstverständliche *umkehrbare* Gleichung verwandeln, wodurch ja eine völlige Kongruenz der beiderseitigen Gebiete hergestellt und wir ohne Zweifel besser befriedigt würden?

So könnten wir auch in unserem Falle fragen und noch manches andere ließe sich anknüpfen. Indessen — um wieder zu dem musikalischen Gleichnis zurückzukehren, von dem ich ausgegangen bin —: Weitere Ausführungen würden sich nun mehr und mehr von dem zuerst angeschlagenen Thema, dem einfachen *Abel*schen Lemma entfernen, während die bisherigen Variationen mit ihm in innigem Zusammenhang geblieben sind und drei nach steigender Mannigfaltigkeit und Feinheit der Gliederung geordnete Sätze einer einheitlichen Komposition bilden. Ich glaube also, meine Arbeit findet an dieser Stelle ihren angemessensten Abschluß.

# Register

DER

## EIGENNAMEN UND EINIGER BESONDEREN DEFINITIONEN UND SÄTZE.

(Die Verweisnummern bedeuten hier Seitenzahlen.)

---

# Symbole,

## welche langhin oder stehend Verwendung finden.

(Die Verweisnummern bedeuten hier Seitenzahlen.)